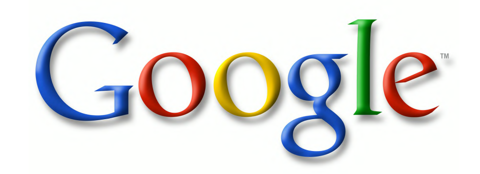


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

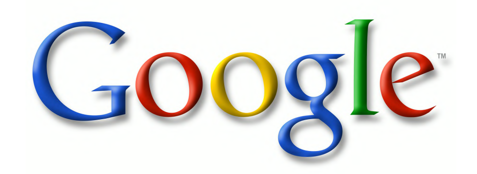
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/



Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

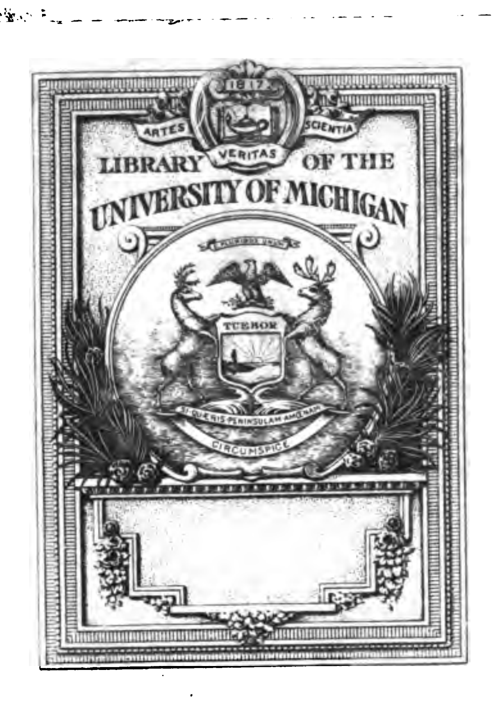
Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

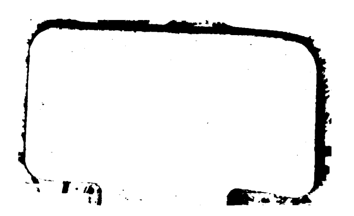
Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.
+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.
+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.
+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.


1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE



Math. Library
QA
[illegible]
[illegible]
v. 3
pt. 1
copy 2

QA
905
D29

Handbuch

der

rationellen Mechanik.

Von

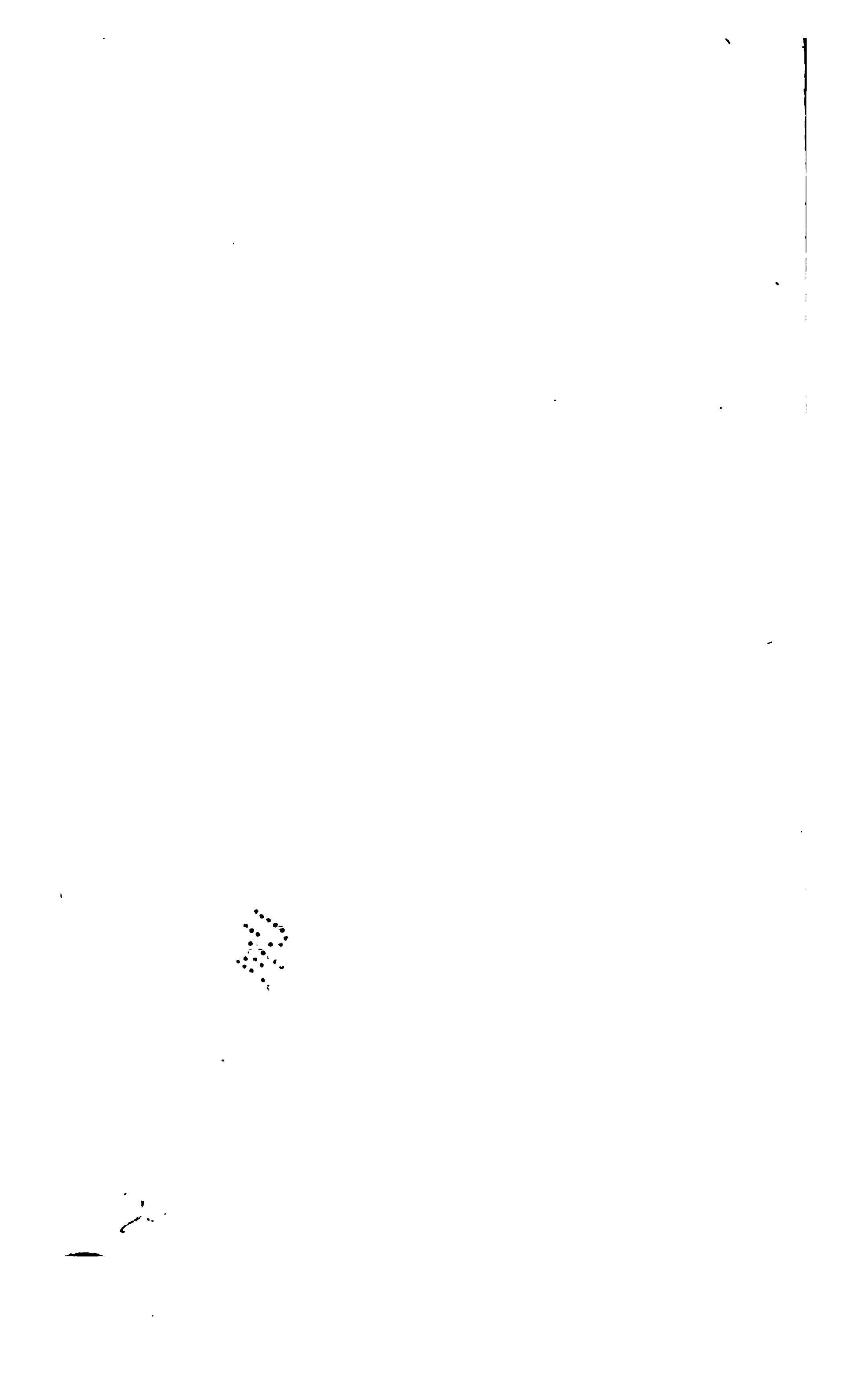
G. Decher,
Professor der Physik und Mechanik an der k. polytechnischen Schule in Augsburg.

Dritter Band. Erste Hälfte.

Mechanik veränderlicher Systeme.

Mit 2 Steintafeln.

Augsburg.
Verlag der Matth. Rieger'schen Buchhandlung.
1855.



Mathematics
QA
805
.D29
v.3
pt.1
copy 2

Drittes Buch.

Mechanik veränderlicher Systeme.

form 401 - 13 - 33 4612

M: uiematics
QA
805
.D29
v.3
pt.1
cap.2

Einleitende Betrachtungen.

§. 1.

Alle Körper in der Natur und umsomehr alle Verbindungen von Körpern sind bezüglich der gegenseitigen Lage der einzelnen Theile oder allgemeiner der einzelnen materiellen Punkte, aus welchen sie bestehen, der *Veränderung* fähig und derselben unterworfen, sobald in den gegenseitigen Verhältnissen der an ihnen thätigen Kräfte eine Aenderung eintritt. Die Ergebnisse der Untersuchungen des vorhergehenden Buches stimmen daher mit den in der Natur zu beobachtenden Erscheinungen nur insofern überein, als wir von diesen Veränderungen, welche für die der festen Aggregatform angehörigen Körper meistens sehr gering sind, Umgang nehmen. Wir begegnen in der Natur aber auch Systemen von materiellen Punkten oder von Körpern, bei welchen die Veränderungen in der gegenseitigen Lage der einzelnen Theile sehr wesentlich und für uns selbst wichtiger sind, als die Gesetze der Bewegung, welche ein solches System als ein zusammengehörendes Ganze erhält, und wir besitzen in unsern Maschinen viele Verbindungen fester Körper, welche ihre gegenseitige Lage fortwährend ändern und von denen auch manche ihre Gestalt wesentlich ändern; die Untersuchung dieser Veränderungen und der Gesetze nach welchen sie stattfinden führt uns demnach zur allgemeinsten Aufgabe der Mechanik, welche darin besteht, die *Bedingungen für das Gleichgewicht und die Gesetze der Bewegung eines veränderlichen Systems von materiellen Punkten festzustellen.*

Der Auflösung dieser Aufgabe soll das gegenwärtige Buch gewidmet sein; es sollen jedoch darin insbesondere nur solche Systeme in's Auge gefaßt werden, bei welchen die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte oder auch größerer Theile weder fest und unwandelbar bestimmt ist,

wie bei den festen Systemen, noch auch bis in die kleinsten Theile willkürlich veränderlich, wie bei den flüssigen Systemen, bei welchen vielmehr diese gegenseitige Lage auf irgend eine Weise bedingt ist, indem sie entweder von bestimmten Kräften abhängt, die innerhalb des Systems thätig sind, oder sich nach gegebenen Bedingungen richten muß, welche geometrisch immer dadurch vorgestellt werden können, daß man bestimmte Punkte des Systems der Beschränkung unterwirft, sich auf gegebenen Flächen oder Curven zu bewegen. Es gehören demnach hieher einmal alle der festen Aggregatform angehörigen Körper, insofern sie als dehn- oder zusammendrückbar, als biegsam und elastisch, u. s. f. zu betrachten sind, also solche stetige Systeme von materiellen Punkten, welche immer eine bestimmte äußere Gestalt an- und einen bestimmten Raum einnehmen, wenn die zwischen den einzelnen Punkten thätigen Kräfte entweder unter sich oder mit den von Außen wirkenden Kräften in's Gleichgewicht gekommen sind, welche aber beides bald mehr bald weniger ändern, sobald dieses Gleichgewicht gestört wird. Ferner gehören hieher alle Verbindungen von festen Körpern, welche verschiedenartige Bewegungen annehmen, aber in solcher Abhängigkeit stehen, daß die Bewegung eines derselben die Bewegungen aller übrigen bedingt und bestimmt, wie dies bei allen Maschinen der Fall ist. Endlich müssen aber auch solche Systeme von festen Körpern hieher gerechnet werden, welche zwar in ihren Bewegungen fast gänzlich unbeschränkt und nur insofern von einander abhängig sind, als zwischen ihnen noch Kräfte wirksam bleiben, die einen Einfluß auf die Bewegungen der einzelnen Theile ausüben, welche aber der Zahl und Größe oder Masse nach bestimmt sind, und zusammen als ein Ganzes, als ein System betrachtet werden können, wie ein Planeten- oder Sonnensystem, oder wie eine Kugel und die Kanone, aus welcher sie abgeschossen wurde, oder zwei Kugeln, welche durch gegenseitigen Stoß ihre Bewegungen ändern, u. s. f.

Allgemein und genauer betrachtet würden auch die Flüssigkeiten unter die veränderlichen Systeme einzureihen, und nur als eine besondere Klasse derselben zu untersuchen sein, da sie sich von der zuletzt genannten Klasse veränderlicher Systeme nur dadurch unterscheiden, daß sie bis zu den kleinsten Theilchen willkürlich veränderlich und als stetige Systeme von materiellen Punkten zu betrachten sind, von denen man weder die Zahl noch die einzelnen Größen oder Massen kennt. Aber gerade dieser letztere Umstand, mit welchem auch der zusammenhängt, daß es in einem solchen System für die Beobachtung fast unmöglich ist, die Bewegung eines einzelnen materiellen Punktes, der sich in Nichts von den übrigen unterscheidet,

zu verfolgen, gibt hier der Untersuchung eine ganz andere Richtung und bestimmt derselben meistens ein wesentlich anderes Ziel, als dies bei den übrigen veränderlichen Systemen der Fall ist; es werden deßhalb die flüssigen Systeme in dem folgenden Buche einer besondern Betrachtung unterzogen werden.

§. 2.

Bei einem veränderlichen System kann im Allgemeinen nicht mehr von einer Gesammtwirkung der Kräfte die Rede sein, wenigstens nicht in demselben Sinne, wie bei einem festen System, d. h. es kann dort die von verschiedenen Kräften hervorgebrachte Wirkung nicht mehr einer einzigen Kraft zugeschrieben oder von einer einzigen Kraft erzeugt gedacht werden, weil bei einem veränderlichen System jeder Angriffspunkt einer Kraft eine eigene, wenn auch nicht völlig unabhängige Bewegung erhält oder doch erhalten kann. Beachtet man aber, daß auch bei einem festen System die Gesammtwirkung immer nur eine augenblickliche ist, und daß man auch ein veränderliches System in jedem Augenblicke als ein zusammengehörendes Ganze betrachten kann, welches gegen andere Systeme oder materielle Punkte seine Lage ändert oder in Bewegung begriffen ist, während innerhalb desselben die gegenseitigen Bewegungen der einzelnen Theile vor sich gehen, so wird allerdings auch in jedem Augenblicke von einer Gesammtwirkung der Kräfte in Bezug auf die Aenderung in dem örtlichen Zustande des ganzen Systems die Rede sein können.

Wir werden uns nämlich, um dieß geometrisch darzustellen, durch einen beliebigen Punkt des Systems ein Coordinatensystem gelegt denken und für irgend einen Augenblick, für welchen wir den Zustand des veränderlichen Systems untersuchen wollen, alle materiellen Punkte desselben mit jenem Coordinatensystem fest verbunden annehmen, das System in diesem Augenblicke also als ein festes betrachten, und können dann die augenblicklich fördernde und drehende Gesammtwirkung aller Kräfte in Bezug auf dieses als fest gedachte System oder in Bezug auf das mit ihm fest verbundene Coordinatensystem wie bei einem festen System berechnen. Mittels dieser Gesammtwirkung, für welche, wie man leicht einsehen wird, alle innerhalb des Systems, d. h. zwischen den einzelnen Theilen oder materiellen Punkten desselben thätigen Kräfte ohne Einfluß bleiben müssen, wird man wie bei einem festen System die Gesetze für die fortschreitende und für die drehende Bewegung unseres Coordinatensystems oder die Bedingungen für das Gleichgewicht desselben ableiten, und es wird sich dann für die vollständige Kenntniß

des Zustandes unseres veränderlichen Systems nur noch darum handeln, die Gesetze der relativen Bewegungen seiner einzelnen Punkte in Bezug auf jenes Coordinatensystem oder die Bedingungen für das Gleichgewicht dieser einzelnen Punkte unter sich darzustellen, wobei natürlich die innern Kräfte vorzüglich maßgebend sein werden, und jeder einzelne Punkt oder feste Theil des Systems für sich betrachtet werden muß.

So wie wir also in dem vorhergehenden Buche die Bewegung eines festen Systems in der Vorstellung in eine fortschreitende und in eine drehende zerlegt und diese als gegenseitig unabhängig von einander betrachtet haben, um uns die Vorstellung derselben zu erleichtern, so werden wir durch die obige Betrachtung dahingeführt, die örtlichen Zustände eines veränderlichen Systems abermals unter zwei verschiedenen, in der Vorstellung unter sich unabhängigen Gesichtspunkten aufzufassen, nämlich ein solches System einmal als ein zusammengehörendes Ganze zu betrachten und die Aenderung seiner Lage in Bezug auf außerhalb desselben liegende Punkte oder in Bezug auf ein festes Coordinatensystem zu untersuchen, und dann blos die Aenderungen zu berücksichtigen, welche innerhalb desselben vor sich gehen. Wir wollen daher dieser Vorstellung gemäß diejenigen Beziehungen, welche die Lage eines veränderlichen Systems, insofern es als ein zusammengehörendes Ganze betrachtet wird, in Bezug auf ein festes Coordinatensystem ausdrücken, **die äußern örtlichen Zustände** des Systems nennen, und diejenigen Beziehungen, welche die innerhalb des Systems vor sich gehenden Aenderungen darstellen, mit dem Namen: **Innere örtliche Zustände** desselben bezeichnen. Die Mechanik veränderlicher Systeme wird darnach in zwei Abschnitte zerfallen, von denen der eine die Untersuchung der äußern, der andere die der innern örtlichen Zustände des Systems zum Gegenstande hat, und von denen der erste durchaus auf die Mechanik der festen Systeme gestützt werden kann, da beide, was die äußere Form der Gesetze der Bewegung und der Bedingungen des Gleichgewichtes betrifft, ganz übereinstimmen, während der zweite Abschnitt im Allgemeinen die Mechanik des materiellen Punktes und insbesondere die Gesetze der relativen Bewegung eines materiellen Punktes zur Anwendung bringt.

So einfach nach dieser Anschauungsweise die Untersuchung der örtlichen Zustände eines veränderlichen Systems auf den ersten Anblick zu sein scheint, so wird man bei näherer Erwägung bald erkennen, wie sehr sich die Schwierigkeiten für diese Untersuchungen im Allgemeinen häufen, da die von Außen wirkenden Kräfte genau genommen immer

auch von der Lage der einzelnen materiellen Punkte innerhalb des Systems abhängen, also gleichzeitig Functionen der Coordinaten sind, durch welche die Lage des beweglichen Anfangspunktes in Bezug auf ein unverrückbares Coordinatensystem festgestellt wird, der Coordinaten-Winkel, welche die Lage der beweglichen Achsen in Bezug auf die festen Coordinaten-Achsen bestimmen, und der Coordinaten, durch welche die Lagen der einzelnen Punkte des Systems in Bezug auf die beweglichen Achsen bestimmt werden. Dazu kommt noch, daß wenn im jetzigen Falle die Untersuchung der drehenden Bewegung der beweglichen Achsen dadurch vereinfacht werden sollte, daß man die Hauptachsen des einen Augenblick als fest gedachten Systems als diese beweglichen Coordinaten-Achsen nimmt, diese im Allgemeinen eine veränderliche Lage im Systeme haben, welche wieder von den innerhalb des Systems stattfindenden Aenderungen abhängt und in jedem Augenblicke sehr schwierig zu bestimmen wäre. Auf der andern Seite ist indessen ersichtlich, daß wegen dieser Veränderlichkeit des Systems die Richtung der beweglichen Coordinaten-Achsen im Allgemeinen sehr unbestimmt ist, wenn man nicht gerade jene augenblicklichen Hauptachsen dafür annimmt, daß es also in den meisten Fällen das Zweckmäßigste sein dürfte, diesen beweglichen Achsen entweder nur eine einfache drehende Bewegung vorzuschreiben, oder ihnen blos eine fortschreitende Bewegung zu geben, so daß sie zu den festen Coordinaten-Achsen immer parallel bleiben, und zwar um so mehr, als in diesem Falle auch die Gleichungen für die relativen Bewegungen der einzelnen Punkte oder Theile des Systems viel einfacher werden und leichter zu behandeln sind.

In den wenigen Fällen, welche wir in dieser Beziehung besonders zu erörtern haben werden, ist auch der Einfluß, welcher eine Aenderung der Lage eines materiellen Punktes innerhalb des Systems oder in Bezug auf das bewegliche Coordinatensystem auf die Intensität der von außen her auf ihn wirkenden Kraft hat, so gering, daß er ohne fühlbaren Fehler vernachlässigt werden darf, wodurch dann die Untersuchung des äußern örtlichen Zustandes wesentlich erleichtert wird.

§. 3.

Die Untersuchung dieser äußern örtlichen Zustände hat indessen für die veränderlichen Systeme mehr einen wissenschaftlichen Werth, insoferne nämlich dadurch die Mechanik aller Systeme von materiellen Punkten denselben allgemeinen Gesetzen unterstellt wird; auf einzelne Fälle findet dieselbe hier nur sehr wenig Anwendung, da wir bei der Untersuchung veränderlicher Systeme gerade die Veränderungen im Innern

derselben, in der gegenseitigen Lage der einzelnen Theile oder Punkte, oder die Veränderungen in der Gestalt des Systems kennen zu lernen wünschen, und dabei von einer Aenderung in der Lage des Systems gegen andere Punkte oder Systeme meistens gänzlich Umgang nehmen, wie z. B. bei der Betrachtung unseres Planetensystems, oder weil wir in dem System einen oder mehrere feste Punkte voraussetzen, durch welche dasselbe als Ganzes betrachtet im Zustande des äußern ruhenden Gleichgewichtes erhalten wird, während dasselbe seine Gestalt fortwährend ändert, also im Innern in Bewegung ist, wie eine schwingende Feder, welche an einem Ende, oder eine schwingende Saite, welche an zwei Enden befestigt ist, oder jede feststehende Maschine, insofern sie als ein Ganzes betrachtet wird.

In allen diesen Fällen werden immer nur die Gesetze für die innerhalb des Systems vor sich gehenden Veränderungen gesucht, und es sind dann auch die innerhalb des Systems, zwischen seinen einzelnen Theilen gegenseitig thätigen Kräfte und die Art der Verbindung der einzelnen Punkte desselben in's Auge zu fassen. Die Untersuchung der innern Zustände eines veränderlichen Systems wird daher wesentlich durch die Natur desselben bedingt und eine andere sein, je nachdem die Masse und die Anzahl der einzelnen Theile des Systems und die Intensität der zwischen ihnen wirkenden Kräfte gegeben ist, oder nicht. Wenn ein System aus einer bestimmten Anzahl materieller Punkte oder fester Körper besteht, welche nach einem bekannten Gesetze auf einander wirken, wie es bei einem Planetensystem oder unsern Maschinen der Fall ist, so ist es nicht schwer für irgend eine Anordnung des Systems die Gesammtwirkung aller auf einen jener Punkte oder Körper thätigen Kräfte zu bestimmen, d. h. in Function der Coordinaten der einzelnen Angriffspunkte auszudrücken, und die ersten Abschnitte der beiden vorhergehenden Bücher geben dazu die nöthige Anleitung. Wenn dagegen das veränderliche System aus einer unbekannten Anzahl von Atomen besteht und zwischen diesen Kräften thätig sind, für welche die Beziehung zwischen ihrer Intensität und der Lage ihrer Angriffspunkte nicht gegeben ist, so läßt sich die Gesammtwirkung aller innern Kräfte in Bezug auf eines jener Atome nicht mehr so bestimmt angeben und es kommt dann darauf an die unbekannten Größen auf die kleinste Anzahl zurückzuführen und zweckmäßig auszudrücken, um ihre Werthe für besondere Fälle mittels einiger bestimmter Veränderungen des Systems, welche durch gegebene Kräfte in demselben hervorgerufen und beobachtet wurden, berechnen zu können. Dieser zweite Fall bezieht sich, wie man leicht fühlen wird, insbesondere auf die Körper der festen Aggregatform, insofern dieselben

in der Gestalt veränderlich und mehr oder weniger elastisch sind. Es wird demnach für diese die Untersuchung des innern Zustandes einen ganz andern Gang einschlagen müssen, als für die zuerst genannten Systeme, und deßwegen in Betreff dieser Untersuchung zwischen stetig veränderlichen und theilweise veränderlichen Systemen zu unterscheiden sein.

§. 4.

Für die Untersuchung der allgemeinen Bewegungsgesetze oder Gleichgewichtsbedingungen macht es keinen Unterschied, ob wir ein veränderliches System als ein aus einzelnen getrennten materiellen Punkten bestehendes betrachten, oder uns dasselbe als ein stetig zusammenhängendes vorstellen, und wir werden deßhalb für die allgemeinen Betrachtungen immer die den nicht stetigen Systemen entsprechende Form der analytischen Ausdrücke beibehalten. Für die spezielle Untersuchung stetiger Systeme dagegen haben wieder die in §. 146 des vorhergehenden Buches niedergelegten Bemerkungen Platz zu greifen; die Kräfte, welche nun auf einen durch seine Coordinaten bestimmten geometrischen Punkt des Systems wirken, oder genauer ausgedrückt die analytischen Maaße dieser Kräfte werden wieder geometrische Kräfte und sind die Aenderungsgesetze der analytischen Maaße für die entsprechenden physischen Kräfte, welche auf ein dem Coordinatensystem entsprechend begrenzten Theil des Systems wirken in Bezug auf die Aenderung dieser Begrenzung oder in Bezug auf die Aenderung des Volums dieses begrenzten Theiles, und in den Fällen, wo die physischen Kräfte, welche auf einen isolirten materiellen Punkt wirken, Functionen von der Masse des letztern sind, werden unsere geometrischen Kräfte wieder entsprechende Functionen der geometrischen Dichte ihres Angriffspunktes. Für die stetigen veränderlichen Systeme von materiellen Punkten treten aber noch einige neue Kräfte auf, welche bei den festen Systemen nicht vorgekommen sind und hier sogleich erwähnt werden sollen.

Die eine dieser Kräfte ist der geometrische Druck in einem durch seine Coordinaten bestimmten Punkt eines solchen Systems. Bei einem festen System haben wir den Druck auf eine feste Fläche, also auf ein anderes festes System nur in einzelnen Punkten und deßhalb immer als physischen betrachtet; denn für ein festes System läßt sich der Druck nur dann bestimmt angeben, wenn sich dasselbe auf ein anderes mit höchstens drei Punkten stützt, bei einer größern Anzahl von Stütz- oder Berührungspunkten hat die Untersuchung über die Vertheilung des Druckes nur dann einen bestimmten Sinn und Zweck, wenn man das eine oder

beide sich berührende Systeme als biegsam, also als veränderlich betrachtet. Folgen in diesem letztern Falle aber die Berührungspunkte stetig auf einander, so daß sie eine stetige Berührungscurve oder Berührungsfläche bilden, so wird sich auch der Druck stetig auf diese Curve oder Fläche vertheilen und es hat keinen Sinn mehr von einem physischen Drucke in einem bestimmten Punkte derselben zu reden, da man sich in diesem Falle immer eine bestimmte Länge oder Fläche hinzudenken muß, auf welche der Druck ausgeübt wird. Das analytische Maaß für den Druck in einem durch seine Coordinaten bestimmten geometrischen Punkte der Berührungslinie oder Fläche, welches als eine stetig veränderliche Function dieser Coordinaten erscheint, immer nur für einen einzigen Punkt gilt und für jeden noch so nahe liegenden Punkt einen andern Werth erhält, muß daher wieder als **geometrischer Druck** betrachtet werden, und ist das **Aenderungsgesetz** des analytischen Maaßes für den **physischen Druck**, welcher auf einen in jenem Punkte begrenzten Theil der Berührungslinie oder Fläche ausgeübt wird, in Bezug auf die Aenderung der **Länge** oder des **Flächeninhaltes**. Wenn dieser geometrische Druck in der ganzen Ausdehnung der Berührungslinie oder Fläche oder eines Theiles derselben der gleiche ist, so ergibt sich das Maaß des darauf ausgeübten physischen Druckes als Product aus dem geometrischen Druck in die entsprechende Länge oder den entsprechenden Flächeninhalt, und dieser geometrische Druck ist in diesem Falle auch das Maaß für den auf die Längen- oder Flächen-Einheit ausgeübten physischen Druck, wie das constante geometrische Gewicht in einem Punkte eines Körpers auch das Maaß für das physische Gewicht der Volumen-Einheit desselben ausdrückt.

Bei den veränderlichen Systemen kommt aber nicht blos ein äußerer Druck in Betrachtung, nämlich ein solcher, welcher auf äußere das System in seiner Bewegung beschränkende Hindernisse ausgeübt wird, sondern auch ein innerer, welcher zwischen den einzelnen Theilen des Systems selbst stattfindet und je nach der Bildung des Systems anders beurtheilt werden muß. Wenn das System ein theilweise veränderliches oder aus bestimmten festen Systemen zusammengesetzt ist, so ist der innere Druck wie der äußere als normal zu den der Form nach bestimmten und bekannten Berührungsflächen dieser festen Systeme wirkend zu betrachten; ist dagegen das System ein stetig veränderliches, so kann man sich innerhalb desselben beliebige Berührungsflächen denken und wird deßhalb dazu am einfachsten ebene Schnitte wählen. Es wird dann aber im Allgemeinen der Druck, welcher die

beiden durch einen solchen ebenen oder auch einen andern Schnitt gesonderten Theile des Systems in irgend einem Punkte dieser Schnittfläche auf einander ausüben, nicht mehr normal zu der Schnittfläche sein, da nun dieser innere Druck auch das Bestreben in sich begreift, die beiden Theile längs der Schnittfläche auf einander zu verschieben, und muß daher als Resultirende einer normalen und einer tangentialen Wirkung, als Resultirende eines eigentlichen normalen Druckes und eines tangentialen Schubes betrachtet werden.

Die andere der obengenannten Kräfte, welche aber nur bei veränderlichen Systemen der festen Aggregatform zur Untersuchung kommt, und dem Druck der Bedeutung nach entgegengesetzt ist, ist die Spannung oder der Zug, d. i. die Kraft, welche zwei materielle Punkte oder zwei Theile eines solchen Systems zu trennen strebt, und welcher die Cohäsion und die Elastizität entgegenwirken, welche also niemals größer werden darf, als die Cohäsionskraft des betreffenden Stoffes, wenn nicht eine wirkliche Trennung erfolgen soll. Die analytischen und geometrischen Beziehungen sind für den Zug ganz dieselben wie für den Druck, nur in so fern einfacher, als man sich beim Zuge immer nur Punkte in einer Ebene, in einem ebenen Schnitte denkt, auf welche diese Kraft unmittelbar wirkt. Die physische Zugkraft, welche den Körper nach einem solchen Schnitte zu trennen strebt, vertheilt sich wieder auf alle Punkte des Schnittes oder der Schnittfläche und gibt für jeden derselben eine in Function seiner Coordinaten ausgedrückte geometrische Zugkraft, welche analytisch betrachtet das Aenderungsgesetz jener physischen Kraft ist in Bezug auf die Aenderung der Fläche des Schnittes.

Auch dieser geometrische Zug ist im Allgemeinen nicht normal zu der Schnittebene gerichtet und zerlegt sich wie der innere Druck in den eigentlichen normal gerichteten Zug und einen längs der Ebene wirkenden Schub, und man wird überhaupt einsehen, daß ein innerer Druck und Zug nur in unserer Vorstellung wesentlich verschieden sind, daß sie sich dagegen für die analytische Untersuchung nur durch den Sinn ihrer Wirkung, also durch die Zeichen der Cosinus ihrer Richtungswinkel unterscheiden. Wir werden daher für die analytischen Beziehungen Zug und Druck als gleichbedeutend nehmen und unter demselben Zeichen begreifen; unter beiden dann aber auch insbesondere nur die normalen Wirkungen verstehen, welche zwei durch eine beliebige Schnittebene getrennten Theile eines stetigen Systems auf einander ausüben, und den längs dieses Schnittes wirkenden Schub als eine besondere Kraft besonders bezeichnen. Diese Zerlegung wird es einleuch-

tend machen, daß auch der Schub in einem bestimmten Punkte der Schnittebene nur als geometrischer Schub zu betrachten ist und das Aenderungsgesetz des physischen Schubes, welcher längs eines dem Coordinatensystem entsprechend begrenzten Theiles der Schnittebene wirksam ist, in Bezug auf die Aenderung der Fläche vorstellt. Während aber der normale Zug oder Druck durch die Lage der Schnittebene der Richtung nach vollständig bestimmt ist, ist es die Richtung des Schubes nur insofern, als dieselbe jener Ebene selbst angehören muß.

In dem besondern Falle, wo der Schnitt immer eine Gerade ist, werden die obengenannten geometrischen Kräfte die Aenderungsgesetze der entsprechenden physischen Kräfte in Bezug auf die Aenderung der Länge, und in diesem Falle ist dann auch die Richtung des Schubes, welcher nur längs des Schnittes stattfinden kann, vollständig bestimmt. Kommt endlich der Schnitt auf einen Punkt zurück, so gibt es keinen Schub mehr und der Zug oder Druck in diesem Punkte kann dann nur ein physischer sein.

Das Nähere hierüber wollen wir dem Orte vorbehalten, wo diese Kräfte zur Anwendung kommen, und ihre Wirkungen insbesondere untersucht werden.

Erster Abschnitt.

Aeußere Zustände eines veränderlichen Systems.

I. Augenblickliche Gesammtwirkung der äußern und innern Kräfte.

§. 5.

Mit dem Namen: Aeußere Zustände haben wir diejenigen Beziehungen bezeichnet, in denen ein veränderliches System von materiellen Punkten zu andern außerhalb desselben liegenden materiellen oder geometrischen Punkten steht, wenn es als ein zusammengehörendes Ganze betrachtet wird, und die Veränderungen in seinem Innern unberücksichtigt bleiben. In dieser Weise genommen wird die uns noch unbekannte Ortsveränderung unseres ganzen Planetensystems im Weltraume die äußere Bewegung desselben sein; eine glühend abgeschossene Kugel wird während ihrer äußern Bewegung sich abkühlen, und daher innerlich eine Bewegung besitzen, von welcher man bei der Betrachtung jener äußern gänzlich Umgang nimmt; eine Feder, welche, während sie vertikal herabfällt, in Schwingung begriffen ist, besitzt eine äußere und eine innere Bewegung; betrachten wir die Fallbewegung oder die äußere, so nehmen wir in Gedanken von den Schwingungen oder von der innern Bewegung Umgang; nehmen wir dagegen auf diese besonders Rücksicht, so sehen wir in der Vorstellung von jener äußern Bewegung ab, oder wir denken uns die Feder im Zustande des äußern Gleichgewichtes.

Um demnach diese in der Vorstellung begründete Trennung der äußern und innern Zustände eines veränderlichen Systems auch in der geometrischen Betrachtung sowie in der analytischen Untersuchung klar durchzuführen, nehmen wir in dem System einen beliebigen Punkt O, dessen Lage in Bezug auf ein unverrückbares Coordinatensystem der x, y, z am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z bestimmt sei, als Anfang zweier beweglichen Coordinatensysteme der x′, y′, z′ und

der ξ, η, ζ an, von denen das erste seine Achsen immer parallel zu den festen Achsen gerichtet hat, während die des zweiten entweder eine vorausbestimmte drehende Bewegung besitzen, oder immer eine bestimmte Lage im System haben, so daß sie entweder in jedem Augenblicke mit den drei Hauptachsen des in diesem Zeitpunkt als fest betrachteten Systems für den Punkt O zusammen fallen, oder so, daß zwei derselben immer in einer im System der Lage nach bestimmten Ebene liegen und eine von ihnen durch einen bestimmten Punkt dieser Ebene geht. Bezeichnen wir sodann die in einem bestimmten Augenblicke oder am Ende der Zeit t von außen auf die Punkte M_1, M_2, M_3, etc., wirkenden Kräfte mit P_1, P_2, P_3, etc.; die zwischen den Punkten M_1 und M_2, M_1 und M_3, M_2 und M_3, u. s. f. stattfindenden gegenseitigen innern Wirkungen, welche gleichzeitig an jedem der beiden betreffenden Punkte angreifen, mit $J_{1,2}$, $J_{1,3}$, $J_{2,3}$, etc.; bezeichnen wir ferner die Winkel, welche die Richtungen der Kräfte P_1, P_2, P_3, etc. mit den festen Achsen der x, y, z einschließen, wie früher mit $\widehat{P_1 x}$, $\widehat{P_1 y}$, $\widehat{P_1 z}$, $\widehat{P_2 x}$, $\widehat{P_2 y}$, $\widehat{P_2 z}$, u. s. f., die Winkel, welche die Richtung der in M_1 angreifenden innern Kraft $J_{1,2}$ mit denselben Achsen bildet, mit $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$; ebenso mit $\alpha_{1,3}$, $\beta_{1,3}$, $\gamma_{1,3}$ die Winkel, welche die Richtung der an M_1 angreifenden Kraft $J_{1,3}$ mit denselben Achsen macht, mit $\alpha_{2,3}$, $\beta_{2,3}$, $\gamma_{2,3}$ diejenigen zwischen diesen Achsen und der Richtung der an dem Punkte M_2 angreifenden Kraft $J_{2,3}$, u. s. f., so daß die an M_2 angreifende Kraft $J_{1,2}$ die Winkel $\pi-\alpha_{1,2}$, $\pi-\beta_{1,2}$, $\pi-\gamma_{1,2}$, die an M_3 angreifende Kraft $J_{1,3}$ die Winkel $\pi-\alpha_{1,3}$, $\pi-\beta_{1,3}$, $\pi-\gamma_{1,3}$, die an M_3 angreifende Kraft $J_{2,3}$ die Winkel $\pi-\alpha_{2,3}$, $\pi-\beta_{2,3}$, $\pi-\gamma_{2,3}$, u. s. f. mit den festen Coordinaten-Achsen einschließt, so erhalten wir für die zu den festen Achsen parallelen Componenten der fördernden Wirkung, welche von sämmtlichen Kräften des Systems auf den Punkt M_1 ausgeübt wird, die Werthe:

$$X_1 = P_1 \cos \widehat{P_1 x} + J_{1,2} \cos \alpha_{1,2} + J_{1,3} \cos \alpha_{1,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Y_1 = P_1 \cos \widehat{P_1 y} + J_{1,2} \cos \beta_{1,2} + J_{1,3} \cos \beta_{1,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Z_1 = P_1 \cos \widehat{P_1 z} + J_{1,2} \cos \gamma_{1,2} + J_{1,3} \cos \gamma_{1,3} + \text{etc.} \;;$$

für den Punkt M_2 hat man in gleicher Weise die Ausdrücke:

$$X_2 = P_2 \cos \widehat{P_2 x} + J_{1,2} \cos(\pi-\alpha_{1,2}) + J_{2,3} \cos \alpha_{2,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Y_2 = P_2 \cos \widehat{P_2 y} + J_{1,2} \cos(\pi-\beta_{1,2}) + J_{2,3} \cos \beta_{2,3} + \text{etc.} \;,$$

$$Z_2 = P_2 \cos \widehat{P_2 z} + J_{1,2} \cos(\pi-\gamma_{1,2}) + J_{2,3} \cos \gamma_{2,3} + \text{etc.} \;;$$

für den Punkt M_3 findet man

$$X_3 = P_3 \cos \widehat{P_3 x} + J_{1,3} \cos(\pi - \alpha_{1,3}) + J_{2,3} \cos(\pi - \alpha_{2,3}) + \text{etc.}\ ,$$

$$Y_3 = P_3 \cos \widehat{P_3 y} + J_{1,3} \cos(\pi - \beta_{1,3}) + J_{2,3} \cos(\pi - \beta_{2,3}) + \text{etc.}\ ,$$

$$Z_3 = P_3 \cos \widehat{P_3 z} + J_{1,3} \cos(\pi - \gamma_{1,3}) + J_{2,3} \cos(\pi - \gamma_{2,3}) + \text{etc.}\ ,$$

und so fort für die übrigen Punkte des Systems.

Denkt man sich dann in dem betreffenden Augenblicke alle diese Punkte unter sich und mit dem festen Coordinatensystem der x, y, z oder auch mit dem beweglichen der x', y', z' oder der ξ, η, ζ fest verbunden, und zerlegt die vorhergehenden Componenten in ihre fördernden und drehenden Wirkungen in Bezug auf den Anfangspunkt der festen Coordinaten, so ergeben sich als entsprechende Componenten der fördernden Gesammtwirkung aller Kräfte die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma.X &= P_1 \cos \widehat{P_1 x} + P_2 \cos \widehat{P_2 x} + P_3 \cos \widehat{P_3 x} + \text{etc.} = \Sigma.P \cos \widehat{P x} \\ \Sigma.Y &= P_1 \cos \widehat{P_1 y} + P_2 \cos \widehat{P_2 y} + P_3 \cos \widehat{P_3 y} + \text{etc.} = \Sigma.P \cos \widehat{P y} \\ \Sigma.Z &= P_1 \cos \widehat{P_1 z} + P_2 \cos \widehat{P_2 z} + P_3 \cos \widehat{P_3 z} + \text{etc.} = \Sigma.P \cos \widehat{P z} \end{aligned}\right\}, (1.$$

also dieselben Werthe, wie für ein festes System, da sich die fördernden Wirkungen aller innern Kräfte je zwei aufheben, und demnach keinen Einfluß auf die augenblickliche fördernde Gesammtwirkung haben.

§. 6.

Ebenso wird man sich leicht überzeugen, daß die innern Kräfte auch auf die drehende Gesammtwirkung keinen Einfluß haben können; denn sind x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes M_1 am Ende der Zeit t in Bezug auf das unverrückbare Coordinatensystem, x_2, y_2, z_2 die des Punktes M_2, und so fort, so hat man für die drehenden Componenten M_Z', M_Y', M_X' des Punktes M_1 in Bezug auf den festen Anfangspunkt und die festen Achsen die Ausdrücke:

$$\begin{aligned} M_Z' = P_1 (x_1 \cos \widehat{P_1 y} - y_1 \cos \widehat{P_1 x}) &+ J_{1,2} (x_1 \cos \beta_{1,2} - y_1 \cos \alpha_{1,2}) \\ &+ J_{1,3} (x_1 \cos \beta_{1,3} - y_1 \cos \alpha_{1,3}) + \text{etc.}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_Y' = P_1 (z_1 \cos \widehat{P_1 x} - x_1 \cos \widehat{P_1 z}) &+ J_{1,2} (z_1 \cos \alpha_{1,2} - x_1 \cos \gamma_{1,2}) \\ &+ J_{1,3} (z_1 \cos \alpha_{1,3} - x_1 \cos \gamma_{1,3}) + \text{etc.}\ , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_X' = P_1 (y_1 \cos \widehat{P_1 z} - z_1 \cos \widehat{P_1 y}) &+ J_{1,2} (y_1 \cos \gamma_{1,2} - z_1 \cos \beta_{1,2}) \\ &+ J_{1,3} (y_1 \cos \gamma_{1,3} - z_1 \cos \beta_{1,3}) + \text{etc.}\ ; \end{aligned}$$

für den Punkt M_2 werden diese Componenten

$$M_Z'' = P_2(x_2 \cos\widehat{P_2 y} - y_2 \cos\widehat{P_2 x}) + J_{1,2}\Big(x_2 \cos(\pi-\beta_{1,2}) - y_2 \cos(\pi-\alpha_{1,2})\Big)$$
$$+ J_{2,3}(x_2 \cos\beta_{2,3} - y_2 \cos\alpha_{2,3}) + \text{etc.}\ ,$$

$$M_Y'' = P_2(z_2 \cos\widehat{P_2 x} - x_2 \cos\widehat{P_2 z}) + J_{1,2}\Big(z_2 \cos(\pi-\alpha_{1,2}) - x_2 \cos(\pi-\gamma_{1,2})\Big)$$
$$+ J_{2,3}(z_2 \cos\alpha_{2,3} - x_2 \cos\gamma_{2,3}) + \text{etc.}\ ,$$

$$M_X'' = P_2(y_2 \cos\widehat{P_2 z} - z_2 \cos\widehat{P_2 y}) + J_{1,2}\Big(y_2 \cos(\pi-\gamma_{1,2}) - z_2 \cos(\pi-\beta_{1,2})\Big)$$
$$+ J_{2,3}(y_2 \cos\gamma_{2,3} - z_2 \cos\beta_{2,3}) + \text{etc.}\ ;$$

für den Punkt M_3 findet man

$$M_Z''' = P_3(x_3 \cos\widehat{P_3 y} - y_3 \cos\widehat{P_3 x}) + J_{1,3}\Big(x_3 \cos(\pi-\beta_{1,3}) - y_3 \cos(\pi-\alpha_{1,3})\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big(x_3 \cos(\pi-\beta_{2,3}) - y_3 \cos(\pi-\alpha_{2,3})\Big) + \text{etc.}\ ,$$

$$M_Y''' = P_3(z_3 \cos\widehat{P_3 x} - x_3 \cos\widehat{P_3 z}) + J_{1,3}\Big(z_3 \cos(\pi-\alpha_{1,3}) - x_3 \cos(\pi-\gamma_{1,3})\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big(z_3 \cos(\pi-\alpha_{2,3}) - x_3 \cos(\pi-\gamma_{2,3})\Big) + \text{etc.}\ ,$$

$$M_X''' = P_3(y_3 \cos\widehat{P_3 z} - z_3 \cos\widehat{P_3 y}) + J_{1,3}\Big(y_3 \cos(\pi-\gamma_{1,3}) - z_3 \cos(\pi-\beta_{1,3})\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big(y_3 \cos(\pi-\gamma_{2,3}) - z_3 \cos(\pi-\beta_{2,3})\Big) + \text{etc.}\ ,$$

und so fort für die übrigen Punkte des Systems.

Die entsprechenden Componenten der augenblicklichen drehenden Gesammtwirkung werden demnach

$$\Sigma . M_Z = \Sigma . P(x \cos\widehat{Py} - y \cos\widehat{Px})$$
$$+ J_{1,2}\Big((x_1 - x_2)\cos\beta_{1,2} - (y_1 - y_2)\cos\alpha_{1,2}\Big)$$
$$+ J_{1,3}\Big((x_1 - x_3)\cos\beta_{1,3} - (y_1 - y_3)\cos\alpha_{1,3}\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big((x_2 - x_3)\cos\beta_{2,3} - (y_2 - y_3)\cos\alpha_{2,3}\Big) + \text{etc.}\ ,$$

$$\Sigma . M_Y = \Sigma . P(z \cos\widehat{Px} - x \cos\widehat{Pz})$$
$$+ J_{1,2}\Big((z_1 - z_2)\cos\alpha_{1,2} - (x_1 - x_2)\cos\gamma_{1,2}\Big)$$
$$+ J_{1,3}\Big((z_1 - z_3)\cos\alpha_{1,3} - (x_1 - x_3)\cos\gamma_{1,3}\Big)$$
$$+ J_{2,3}\Big((z_2 - z_3)\cos\alpha_{2,3} - (x_2 - x_3)\cos\gamma_{2,3}\Big) + \text{etc.}\ ,$$

$$\Sigma . M_x = \Sigma . P (y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py})$$
$$+ J_{1,2} \Big((y_1 - y_2) \cos \gamma_{1,2} - (z_1 - z_2) \cos \beta_{1,2} \Big)$$
$$+ J_{1,3} \Big((y_1 - y_3) \cos \gamma_{1,3} - (z_1 - z_3) \cos \beta_{1,3} \Big)$$
$$+ J_{2,3} \Big((y_2 - y_3) \cos \gamma_{2,3} - (z_2 - z_3) \cos \beta_{2,3} \Big) + \text{etc.} \; ;$$

beachtet man aber, daß wenn man durch

$l_{1,2} = \sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ die Entfernung der Punkte M_1 u. M_2
$l_{1,3} = \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2+(z_1-z_3)^2}$ „ „ „ „ M_1 u. M_3
$l_{2,3} = \sqrt{(x_2-x_3)^2+(y_2-y_3)^2+(z_2-z_3)^2}$ „ „ „ „ M_2 u. M_3
u. s. f.

bezeichnet, die Beziehungen:

$$\cos \alpha_{1,2} = \frac{x_1 - x_2}{l_{1,2}}, \quad \cos \beta_{1,2} = \frac{y_1 - y_2}{l_{1,2}}, \quad \cos \gamma_{1,2} = \frac{z_1 - z_2}{l_{1,2}},$$
$$\cos \alpha_{1,3} = \frac{x_1 - x_3}{l_{1,3}}, \quad \cos \beta_{1,3} = \frac{y_1 - y_3}{l_{1,3}}, \quad \cos \gamma_{1,3} = \frac{z_1 - z_3}{l_{1,3}},$$
$$\cos \alpha_{2,3} = \frac{x_2 - x_3}{l_{2,3}}, \quad \cos \beta_{2,3} = \frac{y_2 - y_3}{l_{2,3}}, \quad \cos \gamma_{2,3} = \frac{z_2 - z_3}{l_{2,3}},$$
u. s. f.

stattfinden, und daß demnach die Factoren

$(x_1-x_2) \cos \beta_{1,2} - (y_1-y_2) \cos \alpha_{1,2}$, $(x_1-x_3) \cos \beta_{1,3} - (y_1-y_3) \cos \alpha_{1,3}$,
$(x_2-x_3) \cos \beta_{2,3} - (y_2-y_3) \cos \alpha_{2,3}$, $(z_1-z_2) \cos \alpha_{1,2} - (x_1-x_2) \cos \gamma_{1,2}$,
u. s. f.

Null werden und zwar für jede beliebige Lage des Coordinatensystems, so wird man leicht finden, daß die vorhergehenden Ausdrücke für die Componenten $\Sigma . M_z$, $\Sigma . M_y$, $\Sigma . M_x$ der augenblicklichen drehenden Gesammtwirkung aller Kräfte auf die einfachen Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . M_z &= \Sigma . P (x \cos \widehat{Py} - y \cos \widehat{Px}) \\ \Sigma . M_y &= \Sigma . P (z \cos \widehat{Px} - x \cos \widehat{Pz}) \\ \Sigma . M_x &= \Sigma . P (y \cos \widehat{Pz} - z \cos \widehat{Py}) \end{aligned}\right\} \quad (2.$$

zurückkommen und demnach wieder dieselben sind, wie bei einem festen System, bei welchem die innerhalb des Systems thätigen Kräfte in

unserer Vorstellung durch starre unbiegsame und unbehnbare Verbindungslinien ersetzt werden.

Man wird aus diesen Ableitungen ferner leicht erkennen, daß die fördernde Gesammtwirkung auch hier dieselbe bleibt für jeden Punkt innerhalb oder außerhalb des Systems, den man als Coordinaten-Anfang annimmt, also namentlich auch in Bezug auf unsern Punkt O und daß die drehende Gesammtwirkung in Bezug auf diesen beweglichen Coordinaten-Anfang und in Bezug auf die beweglichen Achsen aus den vorhergehenden Werthen (2) hervorgeht, wenn man statt der Coordinaten x, y, z eines dem System angehörenden Punktes in Bezug auf die festen Coordinaten-Achsen, dessen Coordinaten x', y', z' oder ξ, η, ζ in Bezug auf eines der beweglichen Achsensysteme, und statt der Winkel $\widehat{Px}$, $\widehat{Py}$, $\widehat{Pz}$ oder $\widehat{Px'}$, $\widehat{Py'}$, $\widehat{Pz'}$, welche von der Richtung der Kraft P mit den festen oder den sich parallel fortbewegenden Achsen gebildet werden, die Winkel $\widehat{P\xi}$, $\widehat{P\eta}$, $\widehat{P\zeta}$ zwischen derselben Richtung und den sich drehenden Achsen einführt, je nachdem man die Ausdrücke für die drehenden Componenten $\Sigma.M_Z$, $\Sigma.M_Y$, $\Sigma.M_X$, um die parallel fortschreitenden Achsen der z', y' und x', oder die Momente $\Sigma.M_{\zeta}$, $\Sigma.M_{\eta}$, $\Sigma.M_{\xi}$ um die in drehender Bewegung begriffenen Achsen der ζ, η und ξ darstellen will.

Für den einfacheren Fall, wo die Richtungen aller Kräfte parallel sind, und unabhängig von der Form des Systems parallel bleiben, hat man daher für die fördernden Componenten

$$\Sigma.X = \cos\widehat{Px}.\Sigma P \quad , \quad \Sigma Y = \cos\widehat{Py}.\Sigma P \quad , \quad \Sigma Z = \cos\widehat{Pz}.\Sigma P$$

und daher für die fördernde Resultirende R einfach

$$R = \sqrt{(\Sigma X)^2 + (\Sigma Y)^2 + (\Sigma Z)^2} = \Sigma P \ .$$

Die drehenden Componenten dagegen nehmen in diesem Falle nur dann eine einfachere Form an, wenn man eine der Achsen, z. B. die der x, parallel zur Richtung der Kräfte voraussetzt; sie werden so

$$\Sigma.M_Z = -\Sigma.Py \quad , \quad \Sigma.M_Y = \Sigma.Pz \quad , \quad \Sigma.M_X = 0$$

und geben als resultirendes Moment

$$M_R = \sqrt{(\Sigma.Py)^2 + (\Sigma.Pz)^2} \ .$$

Es wird aber nun, wie man sich leicht überzeugen wird, für jede beliebige Lage der Achsen die Bedingungsgleichung:

$$\Sigma X.\Sigma.M_X + \Sigma Y.\Sigma.M_Y + \Sigma Z.\Sigma.M_Z = 0$$

für das Vorhandensein einer allgemeinen Resultirenden befriedigt (vgl. II. B.,

§. 82.), und man hat zur Bestimmung der Coordinaten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ des Angriffspunktes dieser Resultirenden $R = \Sigma . P$ die Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} (R\mathfrak{X} - \Sigma.\widehat{Px}) \cos Py - (R\mathfrak{Y} - \Sigma.\widehat{Py}) \cos Px = 0 \\ (R\mathfrak{Z} - \Sigma.\widehat{Pz}) \cos Px - (R\mathfrak{X} - \Sigma.\widehat{Px}) \cos Pz = 0 \\ (R\mathfrak{Y} - \Sigma.\widehat{Py}) \cos Pz - (R\mathfrak{Z} - \Sigma.\widehat{Pz}) \cos Py = 0 \end{array}\right\}$$

welche unabhängig von der Lage des Coordinatensystems befriedigt werden, wenn man

$$R\mathfrak{X} = \Sigma.Px \quad , \quad R\mathfrak{Y} = \Sigma.Py \quad , \quad R\mathfrak{Z} = \Sigma.Pz \qquad (3.$$

setzt und daraus die Werthe zieht

$$\mathfrak{X} = \frac{\Sigma.Px}{\Sigma.P} \quad , \quad \mathfrak{Y} = \frac{\Sigma.Py}{\Sigma P} \quad , \quad \mathfrak{Z} = \frac{\Sigma.Pz}{\Sigma P} \; .$$

Es gibt also auch bei einem veränderlichen System einen Mittelpunkt paralleler Kräfte und daher bei einem schweren veränderlichen System einen Schwerpunkt; die Lage dieser Punkte, von denen der letztere auch mit dem Mittelpunkte der Masse zusammenfällt, hängt aber von der Gestalt des Systems ab, und ist, wenn innere Veränderungen stattfinden, im Allgemeinen in jedem Augenblicke eine andere.

III. Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems.

§. 7.

Ein veränderliches System befindet sich im Zustande des äußeren Gleichgewichtes, wenn sich in demselben ein Coordinatensystem bestimmen läßt, welchem in Bezug auf ein festes Coordinatensystem weder eine fortschreitende noch eine drehende Bewegung durch die an dem System thätigen äußern Kräfte ertheilt werden kann, wenn in irgend einem Augenblicke alle Punkte desselben unter sich und mit jenem ersten Coordinatensystem fest verbunden gedacht werden. Ein Coordinaten-System ist aber in seiner Lage durch eine Ebene oder durch drei Punkte bestimmt; es genügt demnach für das Erkennen des äußeren Gleichgewichtes, daß entweder drei Punkte des Systems in Ruhe bleiben, oder daß zwei Punkte in Ruhe sind, und daß die Ebene, welche durch diese und einen dritten Punkt des Systems gelegt wird, immer dieselbe Lage behält, oder daß ein Punkt in Ruhe ist und die Ebene,

welche durch ihn und zwei andere bestimmte Punkte des Systems gelegt werden kann, immer unverrückt bleibt. Natürlich ist bei dieser Vorstellung nur von dem ruhenden äußeren Gleichgewicht die Rede, und in dem Falle, wo an dem System auch Widerstände, wie die Reibung, thätig sind, von der Grenze des ruhenden Gleichgewichtes, da auch hier, wie bei einem festen System sich die fördernde und drehende Gesammtwirkung der Kräfte in Bezug auf die mit dem System fest verbundenen Coordinaten-Achsen fortwährend Null sein kann, während diese vermöge einer früher mitgetheilten Geschwindigkeit in einer gleichförmigen fortschreitenden oder drehenden Bewegung begriffen sind. Das ruhende Gleichgewicht setzt also einerseits nicht blos Gleichgewicht der Kräfte, sondern auch noch die Bedingung voraus, daß dem System keine anfängliche Geschwindigkeit ertheilt worden ist, und auf der anderen Seite ist dasselbe umsomehr gesichert, je mehr die Widerstände ihre durch die Grenze des Gleichgewichtes bestimmte Größe überschreiten.

Was nun die Bedingungen für das Gleichgewicht der Kräfte betrifft, so folgt aus dem Vorhergehenden, daß diese der Form nach dieselben sein müssen, wie bei den festen Systemen; bezieht man also die fördernde und drehende Gesammtwirkung aller Kräfte auf den Anfangspunkt des Coordinatensystems der ξ, η, ζ, welches mit dem veränderlichen System in jedem Augenblicke als fest verbunden gedacht wird, und bezeichnet die fördernde Gesammtwirkung mit R, die drehende mit M_R, so sind

$$R = 0 \quad , \quad M_R = 0 \qquad 3$$

die nothwendigen und genügenden Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines freien veränderlichen Systems. Beide lösen sich wieder in drei weitere Bedingungsgleichungen auf, nämlich $R = 0$ in die Bedingungen:

$$4.) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma.\Xi = \Sigma.P\cos\widehat{P\xi} = 0 \quad , \quad \Sigma.H = \Sigma.P\cos\widehat{P\eta} = 0 \; , \\ \qquad \Sigma.Z = \Sigma.P\cos\widehat{P\zeta} = 0 \; , \end{array} \right.$$

von denen jede das Gleichgewicht längs einer der Achsen der ξ, η und ζ verbürgt, und $M_R = 0$ in die Bedingungen:

$$5.) \left\{ \begin{array}{l} \Sigma.M_Z = \Sigma.P(\xi\cos\widehat{P\eta} - \eta\cos\widehat{P\xi}) = 0 \; , \\ \Sigma.M_H = \Sigma.P(\zeta\cos\widehat{P\xi} - \xi\cos\widehat{P\zeta}) = 0 \; , \\ \Sigma.M_\Xi = \Sigma.P(\eta\cos\widehat{P\zeta} - \zeta\cos\widehat{P\eta}) = 0 \; , \end{array} \right.$$

von denen jede das Gleichgewicht um eine jener Achsen sichert.

Man schließt aus diesen Gleichungen, daß wenn die Kräfte P selbst sich nicht wesentlich mit der Lage ihrer Angriffspunkte im System ändern, das Gleichgewicht längs der drei Achsen oder das Gleichgewicht der fördernden Kräfte unabhängig ist von der Gestalt des Systems, daß aber das Gleichgewicht um die Coordinaten-Achsen oder das Gleichgewicht der drehenden Kräfte immer wesentlich durch die Gestalt des Systems bedingt wird und daher bald für alle Gestaltungen, die es, in einer bestimmten innern Bewegung begriffen, nach einander annimmt, oder nur für einzelne derselben stattfinden kann. Man kann daher bei einem veränderlichen System, wie bei einem in seiner Bewegung beschränkten materiellen Punkte zwischen dauerndem und augenblicklichem oder vorübergehendem Gleichgewicht unterscheiden. Der materielle Punkt befindet sich im Zustande des dauernden Gleichgewichtes (den Begriff: Gleichgewicht im allgemeinsten Sinn genommen), wenn die bewegende Kraft immer normal zu der Curve oder Fläche ist, auf welche er sich bewegt, oder was auf dasselbe hinauskommt (vergl. I. B. §§. 93 u. 108), wenn er sich gleichförmig bewegt; ist dagegen die bewegende Kraft nur in einzelnen Punkten der Bahn des Bewegten normal zu der festen Curve oder Fläche, so findet in diesen Punkten augenblickliches und vorübergehendes Gleichgewicht statt. Ebenso wird das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems ein dauerndes sein, wenn die Gleichgewichtsbedingungen (5) für alle Formen, welche dasselbe bei seiner innern Bewegung annimmt, befriedigt werden; ein augenblickliches dagegen, wenn sie nur für einzelne dieser Gestaltungen befriedigt werden. Im ersten Falle kann das äußere Gleichgewicht des veränderlichen Systems zugleich ruhendes Gleichgewicht sein, im letztern nur dann, wenn bei der entsprechenden Gestalt des Systems auch inneres ruhendes Gleichgewicht stattfindet. In jedem Falle wird ein freies veränderliches System sich im Zustande des dauernden äußern Gleichgewichtes befinden, wenn keine äußern Kräfte P an demselben angreifen. So würden zwei oder mehrere Körper, z. B. ein Planetensystem, als im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindlich zu betrachten sein, wenn sie, blos ihrer gegenseitigen Anziehung unterworfen, ganz allein im Raume vorhanden wären. Im Uebrigen bietet sich für die Untersuchung der Bedingungen des äußern Gleichgewichtes bei einem freien veränderlichen System bis jetzt fast gar keine Anwendung dar, weßwegen ich auch darauf nicht weiter eingehen werde.

Wenn die Kräfte P der Richtung nach alle parallel sind, also alle Winkel $\widehat{P\xi}$, $\widehat{P\eta}$, $\widehat{P\zeta}$ gleich werden, so kommen die drei ersten

Bedingungsgleichungen (4) wieder auf die einzige

$$6.)\qquad \Sigma.P = R = 0$$

zurück, und die drei folgenden können durch die einfacheren

$$7.)\qquad \Sigma.P\xi = 0 \quad , \quad \Sigma.P\eta = 0 \quad , \quad \Sigma.P\zeta = 0$$

ersetzt werden, welche selbst wieder auf zwei, wie

$$\Sigma.P\eta = 0 \quad , \quad \Sigma.P\zeta = 0 \, ,$$

zurückkommen, wenn eine der Achsen, z. B. die der ξ parallel zur Richtung der Kräfte angenommen wird, wie es aus dem, was am Ende des vorigen Paragraphen über die Gesammtwirkung paralleler Kräfte gesagt wurde, leicht zu schließen ist, und für die festen Systeme im II. Abschnitt des II. Buches ausführlich erörtert wurde.

§. 8.

Die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines in seiner äußern Bewegung beschränkten veränderlichen Systems werden im Allgemeinen wieder am sichersten dadurch abgeleitet werden, daß man die für jene Beschränkungen nothwendigen Widerstände in die Gleichungen (4) und (5) einführt, und dabei die Gestalt des Systems als gegeben oder zwischen gewissen Grenzen veränderlich annimmt, wenn dieselbe Einfluß auf die Gleichgewichtsbedingungen erhält.

Nehmen wir sogleich als Beispiel die in §. 132 des II. Buches behandelte einfache Aufgabe mit der Abänderung, daß die Gerade eine veränderliche und in Schwingungen begriffen sei, und sprechen wir jene Aufgabe nun so aus.

Eine schwere elastische Gerade BC, Fig. 1, stützt sich mit ihren Endpunkten an die Schenkel AX und AY eines rechten Winkels, von denen AY mit der Richtung der Schwere parallel ist; alle Punkte derselben sind in Schwingungen begriffen, welche in der Ebene des Winkels XAY liegen und ihr in irgend einem Augenblicke eine Gestalt geben, die in Bezug auf die Gerade BC als Abscissenachse und den Punkt B als Anfangspunkt durch die Gleichung:

$$\eta = h \sin \pi \frac{\xi}{l}$$

ausgedrückt werde, so daß h die augenblickliche Ausweichung der Mitte D von BC und l die augenblickliche Länge der Geraden BC bezeichnet; es soll unter Berücksichtigung der Reibung die Intensität

der längs der Geraden AX gerichteten Kraft P gesucht werden, welche die Gerade BC, wenn sie mit der AX den Winkel φ bildet, am Ausgleiten hindert, also im Gleichgewicht erhält.

Die äußern Kräfte, welche an der Geraden BC thätig sind, sind die gesuchte Kraft P, die Widerstände N_1 und N_2 der Geraden AX und AY und das Gewicht Q der Geraden BC, welches immer im Schwerpunkt derselben angreift, für welches also dieser letztere zunächst zu bestimmen ist. Die Gleichung:

$$\eta = h \sin \pi \frac{\xi}{l}$$

gibt das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \pi \frac{h}{l} \cos \pi \frac{\xi}{l}$$

und damit die Länge $l_{,}$ der gebogenen Linie BDC durch das Integral:

$$l_{,} = \int_0^l d\xi \,. \sqrt{1 + \frac{\pi^2 h^2}{l^2} \cos^2 \pi \frac{\xi}{l}} \,.$$

Setzt man dann voraus, daß h gegen l immer hinreichend klein bleibe, um das Glied $\frac{\pi^4 h^4}{l^4} \cos^4 \pi \frac{\xi}{l}$ und die folgenden mit hinreichender Annäherung vernachlässigen zu können, so erhält man

$$\sqrt{1 + \frac{\pi^2 h^2}{l^2} \cos^2 \pi \frac{\xi}{l}} = 1 + \frac{\pi^2 h^2}{2 l^2} \cos^2 \pi \frac{\xi}{l}$$

und damit

$$l_{,} = l \left(1 + \frac{\pi^2 h^2}{4 l^2}\right) .$$

Daraus folgt dann umgekehrt

$$l = \frac{l_{,}^3}{4 l_{,}^2 + \pi^2 h^2}$$

als augenblickliche Länge der Geraden BC, weil man nun mit gleicher Annäherung in dem Nenner des Bruches $\frac{\pi^2 h^2}{l^2}$ die $l_{,}$ für die l setzen kann.

Man hat dann ferner, indem man die Coordinaten des Schwerpunktes der Curve BD'C mit $\xi_{,}$ und $\eta_{,}$ bezeichnet, und unter derselben Voraussetzung in Bezug auf h und l

$$l,\xi, = \int_0^l d\xi.\xi \sqrt{1+\frac{\pi^2 h^2}{l^2} cos^2\pi \frac{\xi}{l}} = \frac{1}{2} l^2 \left(1+\frac{\pi^2 h^2}{4 l^2}\right)$$

und daraus, wie ohnehin einleuchtet,

$$\xi, = \frac{1}{2} l .$$

Ebenso ergibt sich nach und nach

$$l,\eta, = \int_0^l d\xi.\eta \sqrt{1+\frac{\pi^2 h^2}{l^2} cos^2\pi\frac{\xi}{l}} = h\int_0^l d\xi . sin \pi \frac{\xi}{l}\left(1+\frac{\pi^2 h^2}{2 l^2} cos^2 \frac{\pi\xi}{l}\right)$$

$$= h \overset{0}{\underset{l}{\Delta}} \left(\frac{l}{\pi} cos\,\pi \frac{\xi}{l} + \frac{\pi h^2}{6 l} cos^3\pi \frac{\xi}{l}\right)$$

$$= \frac{h}{3\pi l}(6 l^2 + \pi^2 h^2)$$

und daraus folgt mit dem Werthe von l,

$$\eta, = \frac{4h}{3\pi}\,\frac{6 l^2 + \pi^2 h^2}{4 l^2 + \pi^2 h^2} .$$

Dieser Werth bezieht sich insbesondere auf die Ausbiegung BDC im Sinne der positiven η, für die Ausbiegung BDC wird h, also auch $\eta,$ negativ. Wandeln wir nun diese Coordinaten $\xi,$ und $\eta,$ des Schwerpunktes der gebogenen Linie BD′C in Bezug auf BC als Achse der ξ in die Coordinaten X und Y in Bezug auf die AX und AY als Achsen der x und y um, so erhalten wir für eine solche Lage der Geraden BC, daß sie mit der AX den Winkel φ bildet, die Werthe:

$$X = \tfrac{1}{2} l\, cos\,\varphi - \frac{4h}{3\pi}\,\frac{6 l^2 + \pi^2 h^2}{4 l^2 + \pi^2 h^2} sin\,\varphi ,$$

$$Y = \tfrac{1}{2} l\, sin\,\varphi - \frac{4h}{3\pi}\,\frac{6 l^2 + \pi^2 h^2}{4 l^2 + \pi^2 h^2} cos\,\varphi .$$

Im Uebrigen bleibt Alles, wie in §. 132 des II. Buches; man hat daher mit derselben Bezeichnung wie dort für das äußere Gleichgewicht folgende Bedingungen:

$$\Sigma . P\, cos\,\widehat{Px} = N' - fN - P = 0$$

$$\Sigma . P\, sin\,\widehat{Px} = -Q + N + fN' = 0$$

$$\Sigma . P(x\, sin\,\widehat{Px} - y\, cos\,\widehat{Px}) = -QX + Nl\, cos\,\varphi - N'l\, sin\,\varphi = 0 .$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen geben wieder die Werthe von N und N′ nämlich:

$$N = \frac{Q - f'P}{1 + ff'} \;,\quad N' = \frac{P + fQ}{1 + ff'}.$$

und damit folgt aus der dritten, wenn man für X zur Abkürzung

$$X = \tfrac{1}{2} l \cos\varphi - \eta_{,} \sin\varphi$$

einführt, die gesuchte Beziehung zwischen P und Q:

$$Q(1 + ff')(\eta_{,} \sin\varphi - \tfrac{1}{2} l \cos\varphi) + (Q - f'P) l \cos\varphi$$
$$- (P + fQ) l \sin\varphi = 0$$

oder in Bezug auf P aufgelöset:

$$P = \tfrac{1}{2} Q \, \frac{l \cos\varphi (1 - ff') + 2\eta_{,} \sin\varphi (1 + ff') - 2 f l \sin\varphi}{l (\sin\varphi + f' \cos\varphi)} \quad \ldots \; (a.$$

Setzen wir zuerst die Reibung an beiden Geraden gleich Null voraus, so wird

$$P = \tfrac{1}{2} Q \left(\cot\varphi + \frac{2\eta_{,}}{l} \right)$$

und es kann daraus entweder die Kraft P bestimmt werden, welche die biegsame Linie in einer gegebenen Lage und bei einer bestimmten Biegung im Gleichgewicht erhält, oder der Werth von $\eta_{,}$ und damit der von h, also die Ausbiegung in der Mitte des Stabes, welche für eine gegebene Kraft P stattfinden darf. Für eine veränderliche Biegung müßte auch die Kraft P veränderlich sein, und eine constante Kraft könnte die Linie BD′C nicht im Zustand des dauernden und ruhenden Gleichgewichtes erhalten, während sie schwingt.

Mit Hülfe der Reibung kann jedoch dieses Gleichgewicht bei kleinen Schwingungen stattfinden und eine constante Kraft P bestimmt werden, oder die Lage der Geraden BC, für welche dasselbe stattfindet, wenn man für h diejenige größte Ausweichung nimmt, für welche die Kraft P oder der Winkel φ den größern Werth haben muß; denn man wird leicht einsehen, daß dann für jede andere Ausweichung ebenfalls das Gleichgewicht bestehen wird, weil die Unterschiede in der Größe der Kraft P oder des Winkels φ bei kleinen Schwingungen nicht so groß werden, daß sie nicht durch die nach jeder Seite hin wirkende Reibung ausgeglichen würden.

Um dieß weiter auszuführen, wollen wir insbesondere nur den Fall betrachten, in welchem P = 0 sein und die schwere Linie durch die

Reibung allein im Gleichgewicht bleiben soll. Man hat dann die Gleichgewichtsbedingung:

$$l \cos\varphi (1 - f f') + 2\eta, \sin\varphi (1 + f f') - 2 f l \sin\varphi = 0$$

und zieht daraus für den Winkel φ den Ausdruck:

$$\cot\varphi = \frac{2 f l - 2\eta,(1 + f f')}{l(1 - f f')}$$

oder für $f' = f$

b.) $$\cot\varphi = \frac{2 f l - 2\eta,(1 + f^2)}{l(1 - f^2)}$$

Dieser Werth zeigt, daß φ den größten Werth erhalten muß, wenn $\eta,$ also auch h den größten positiven Werth hat oder nach unserer Lage der Achsen der ξ und η, wenn die Linie BC gegen den Anfangspunkt A convex ist; es ist daher zu untersuchen, ob und unter welchen Verhältnissen das Gleichgewicht besteht für den entsprechenden größten negativen Werth von h, für welchen die Grenze des Gleichgewichtes stattfinden würde, wenn φ den der Gleichung:

c.) $$\cot\varphi = \frac{2 f l + 2\eta,(1 + f^2)}{l(1 - f^2)}$$

entsprechenden Werth erhält.

Das Gleichgewicht findet jedenfalls statt, sobald der Reibungscoeffizient größer ist, als es die Bedingung für die Grenze des Gleichgewichtes erfordert. Aus der Bedingung (c) für ein negatives $\eta,$ folgt aber

$$f^2 (l \cot\varphi - 2\eta,) + 2 f l = l \cot\varphi + 2\eta,$$

und

$$f = \frac{\sqrt{l^2 + (l \cot\varphi - 2\eta,)(l \cot\varphi + 2\eta,)} - l}{l \cot\varphi + 2\eta,};$$

aus der Bedingung (b) dagegen zieht man für ein positives $\eta,$

$$f = \frac{\sqrt{l^2 + (l \cot\varphi + 2\eta,)(l \cot\varphi - 2\eta,)} - l}{l \cot\varphi - 2\eta,},$$

und dieser Werth ist für dasselbe φ immer größer als der erste, so lange $\cot\varphi$ nicht negativ wird, was nach den hier stattfindenden Bedingungen nicht eintreten kann. Der größte mögliche Werth von φ ist $\frac{1}{2}\pi$ und für diesen wird mit einem positiven $\eta,$

$$f = \frac{\sqrt{l^2 - 4\eta,^2} - l}{-2\eta,} = \frac{l\left(1 - \frac{2\eta,^2}{l^2}\right) - l}{-2\eta,} = \frac{\eta,}{l};$$

für ein negatives η, wird demnach auch f negativ, weil für eine solche Ausbiegung BD′C Fig. 2 die Reibung die Richtung und das Zeichen wechseln muß.

Aehnliche Verhältnisse ergeben sich dann auch, wenn die Kraft P nicht Null ist, und es wird mittels der Reibung immer Gleichgewicht bestehen, wenn es für die größte positive Ausweichung h stattfindet.

§. 9.

Im Allgemeinen werden die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines in seiner Bewegung beschränkten veränderlichen Systems die Form annehmen:

$$\left.\begin{array}{c} \Sigma.\Xi - \Sigma.\mathrm{N}\cos\widehat{\mathrm{N}\xi} = 0 \quad , \qquad \Sigma.H - \Sigma.\mathrm{N}\cos\widehat{\mathrm{N}\eta} \\ \Sigma.Z - \Sigma.\mathrm{N}\cos\widehat{\mathrm{N}\zeta} \end{array}\right\},$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma.\mathrm{M}_Z - \Sigma.\mathrm{N}(\xi\cos\widehat{\mathrm{N}\eta} - \eta\cos\widehat{\mathrm{N}\xi}) = 0 \\ \Sigma.\mathrm{M}_H - \Sigma.\mathrm{N}(\zeta\cos\widehat{\mathrm{N}\xi} - \xi\cos\widehat{\mathrm{N}\zeta}) = 0 \\ \Sigma.\mathrm{M}_\Xi - \Sigma.\mathrm{N}(\eta\cos\widehat{\mathrm{N}\zeta} - \zeta\cos\widehat{\mathrm{N}\eta}) = 0 \end{array}\right\},$$

worin N einen der für jene Beschränkung nothwendigen Widerstände vorstellt, und $\widehat{\mathrm{N}\xi}$, $\widehat{\mathrm{N}\eta}$, $\widehat{\mathrm{N}\zeta}$ die Winkel sind, welche die Richtung desselben mit den Achsen der ξ, η und ζ einschließt.

Es wird demnach äußeres Gleichgewicht stattfinden, wenn aus diesen Gleichungen die unbekannten N eliminirt werden können, und die durch diese Elimination sich ergebenden Gleichungen durch die äußern Kräfte befriedigt werden; diese Gleichungen werden ferner lehren, ob ein dauerndes äußeres Gleichgewicht stattfinden kann, oder nur ein vorübergehender Gleichgewichtszustand, und sie werden im letztern Falle zugleich dazu dienen, die Gestalt des Systems zu bestimmen, für welche ein solcher Zustand eintritt, mit welcher also das System im Zustand des innern Gleichgewichtes verharren muß, wenn das äußere Gleichgewicht auf die Dauer bestehen soll.

Im Allgemeinen wird hier aber auch der Fall eintreten, daß mit der äußern Bewegung auch die innere beschränkt wird, daß also unter den Widerständen N auch solche vorkommen, welche von der Beschränkung der innern Bewegung herrühren und daher nur eliminirt werden können, wenn man die innern und äußern Zustände des Systems neben einander betrachtet. Es leuchtet ein, daß in einem solchen Falle

nur dann dauerndes äußeres Gleichgewicht bestehen kann, wenn auch inneres Gleichgewicht stattfindet, wenigstens in Bezug auf diejenigen Theile des Systems, welche durch die äußern Hindernisse eine Beschränkung in ihrer Bewegung erleiden. Beispiele für solche Fälle bieten insbesondere die fortschaffenden Maschinen oder Locomotiven und überhaupt alle durch innere Kräfte mittels äußerer Hindernisse sich fortbewegende Systeme, also namentlich Menschen und Thiere.

Die ebengenannten Beispiele zeigen ferner, daß die Beschränkung der innern Bewegung auch blos in der Reibung bestehen kann, welche durch die aus der äußern Beschränkung entstehenden Druckkräfte N zwischen entsprechenden Punkten des Systems und der die Bewegung beschränkenden Flächen, auf welchen sich diese Punkte gleitend bewegen können, hervorgerufen wird. In allen diesen wie in den vorher berührten Fällen können aber die Bedingungen für das Gleichgewicht nur durch die Aufstellung der Gleichungen für die äußere und die innere Bewegung des Systems vollständig ermittelt werden, weßhalb es zwecklos wäre, hier in eine weitere Erörterung darüber einzugehen.

Ebensowenig kann hier auf die Bestimmung der Druckkräfte N für die einzelnen in ihrer Bewegung beschränkten Punkte des Systems näher eingegangen werden, da diese Bestimmung im Allgemeinen die Kenntniß des innern Zustandes voraussetzt, namentlich dann, wann das System längs einer Linie oder in der ganzen Ausdehnung eines Flächentheiles mit einer festen Fläche in Berührung steht.

In einigen besondern Fällen lassen sich indessen wie bei den festen Systemen (II. Buch, §. 137) die Gleichgewichtsbedingungen ohne unmittelbare Anwendung der unbekannten Druckkräfte N erkennen, und es liegt uns hier nur ob, indem wir diese Fälle kurz wiederholen, einige Beispiele bei veränderlichen Systemen anzuführen.

1) Wenn das System einen festen Punkt enthält, so wird man diesen als Anfangspunkt des festen und des beweglichen Coordinaten-Systems wählen, und in Bezug auf ihn die augenblickliche fördernde und drehende Wirkung aller Kräfte für eine beliebige Gestalt des Systems untersuchen. Die fördernde Resultirende R wird durch den Widerstand des festen Punktes, von welchem vorausgesetzt wird, daß er wenigstens ebenso groß sei, als R, unwirksam gemacht; es sind daher nur noch die drehenden Wirkungen M_X, M_Y, M_Z oder $M_{\mathfrak{X}}$, M_H, M_Z zu berücksichtigen, d. h. es ist zu untersuchen, ob die Gleichungen:

$$\Sigma . M_X = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Z = 0$$

oder

$$\Sigma . M_{\mathfrak{X}} = 0 \quad , \quad \Sigma . M_H = 0 \quad , \quad \Sigma . M_{\mathfrak{Z}} = 0$$

für jede Gestalt des Systems, oder für welche Gestaltungen desselben sie befriedigt werden; im ersten Falle wird das äußere Gleichgewicht unabhängig von dem innern Zustande des Systems stattfinden und dasselbe daher auch ein ruhendes Gleichgewicht sein; im zweiten Falle wird das Gleichgewicht nur ein augenblickliches oder vorübergehendes Gleichgewicht der Kräfte sein, wenn das System in innerer Bewegung begriffen ist.

So wird sich ein schwerer elastischer Stab, welcher in seinem Schwerpunkt unterstützt ist, im Zustande des dauernden und ruhenden äußern Gleichgewichtes befinden, während seine beiden Hälften in Schwingungen begriffen sind; ebenso eine cylindrische Spiralfeder, deren Achse wagrecht oder lothrecht gerichtet und deren Schwerpunkt unterstützt ist und während der parallel zur Achse stattfindenden Schwingungen ihrer Windungen unterstützt bleibt.

2) Wenn das System zwei feste Punkte enthält oder mehrere, welche in derselben Geraden liegen, so wird man die Verbindungslinie dieser beiden Punkte als eine der Coordinatenachsen nehmen, z. B. als die der z und ζ; die fördernde Resultirende R wird dann durch den Widerstand jener festen Punkte unwirksam gemacht, ebenso wie die Momente $\Sigma . M_X$ und $\Sigma . M_Y$ oder $\Sigma . M_\Xi$ und $\Sigma . M_H$, welche das System um die zu der festen Achse der z oder ζ senkrechten Achsen der x und y oder ξ und η drehen wollen. Es bleibt also das äußere Gleichgewicht nur noch von dem Momente $\Sigma . M_Z$ oder $\Sigma . M_Z$ abhängig, und wird durch die einzige Gleichung:

$$\Sigma . M_Z = 0$$

verbürgt. Die fördernden Componenten $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$ und $\Sigma . Z$ oder die entsprechenden für die Achsen der ξ, η und ζ dienen aber in Verbindung mit den vorhergenannten Momenten, welche auf das Gleichgewicht selbst keinen Einfluß haben, dazu, das Maaß des kleinsten Widerstandes zu bestimmen, welchen die beiden festen Punkte zusammen zu leisten haben, damit jene fördernde Wirkung auf die Dauer unwirksam bleibt. Bei der Betrachtung veränderlicher Systeme wird es aber in den meisten Fällen nothwendig sein, diese Widerstände für jeden der festen Punkte einzeln zu bestimmen, oder mit andern Worten die drei fördernden Kräfte $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$, $\Sigma . Z$ in parallele Componenten zu zerlegen, deren Angriffspunkte jene festen Punkte sind, und zwar um so mehr, als hier auch noch Widerstände hinzukommen, welche jene Punkte gegen die Wirkungen der innern Kräfte zu leisten haben, und die meistens von einem jeden derselben in einer andern Richtung zu leisten sind, sei es, daß sich das System im Zustande des innern Gleichgewichtes

befindet oder nicht. Für die Bestimmung des Widerstandes, welchen jeder einzelne Stützpunkt zu leisten hat, ist daher die Kenntniß der innern Zustände des Systems unentbehrlich.

Ein Beispiel für diesen Fall gibt uns eine an zwei Endpunkten in lothrechter Lage befestigte und gespannte ihrer Länge nach elastische Linie (eine Saite), welche sich im Zustande des dauernden äußern Gleichgewichtes befindet, während ihre Theile nach beliebigen Richtungen schwingen; eine in wagrechter Lage gespannte Saite dagegen wird, wenn sie schwer ist, strenggenommen nur dann den Zustand des dauernden äußern Gleichgewichtes besitzen, wenn ihre Schwingungen in lothrechter Richtung stattfinden, weil bei wagrechten Schwingungen durch ihr Gewicht eine veränderliche drehende Wirkung eintritt, welche der Schwingungsebene eine lothrechte Lage zu geben strebt. Auf gleiche Weise verhält es sich mit einer senkrecht zu ihrer Länge elastischen Linie (einem sehr dünnen elastischen Stabe), welcher in zwei an dem einen Ende liegenden Punkten loth- oder wagrecht befestigt ist, und sich in Folge dessen im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, während dessen anderes Ende frei schwingt; diese Schwingungen dürfen bei lothrechter Befestigung wieder nach jeder Richtung hin stattfinden, bei wagrechter Befestigung aber nur in einer lothrechten Ebene, wenn der Stab schwer ist und sich, wie dieß bei zwei festen Punkten immer vorausgesetzt wird, um deren Verbindungslinie drehen läßt *). Endlich kann man eine in lothrechter Lage aufgestellte Kanone, aus welcher eine Kugel abgeschossen wird, als hieher gehörendes Beispiel betrachten, wenn man von der Umdrehung der Erde Umgang nimmt und die Luft unbewegt voraussetzt, so daß sich der Mittelpunkt der abgeschossenen Kugel immer in der Verlängerung der geometrischen Achse der Kanone bewegt. Ganz rationell betrachtet kann dieses System selbst als Beispiel für den vorhergehenden Fall dienen, da es für das Gleichgewicht genügt, daß der Schwerpunkt der Kanone unterstützt ist und dazu nur ein einziger fester Punkt im System erfordert wird. Nimmt man die lothrechte Achse der Kanone als Achse der z, so werden nach unseren Voraussetzungen immer die drei Gleichungen:

$$\Sigma . M_X = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Z = 0$$

befriedigt und daher das System immer im Zustande des äußern Gleichgewichtes sein.

*) Ein Widerstand gegen das Drehen kann nur stattfinden, wenn noch ein dritter fester Punkt vorhanden ist, welcher außerhalb der Verbindungslinie der beiden ersten liegt.

3) Wenn ein System drei feste Punkte enthält, welche nicht in derselben Geraden liegen, so befindet sich dasselbe nach der im §. 7 gegebenen Erklärung immer im Zustande des äußern Gleichgewichtes, weil diese drei Punkte immer die Lage eines Coordinatensystems bestimmen, welches durch die äußern Kräfte nicht verrückt werden kann, wenn man sich in irgend einem Augenblicke alle Theile des Systems fest verbunden denkt.

In diesem Falle befindet sich demnach jede feststehende Maschine, ob sie in Bewegung oder in Ruhe ist; ein in beliebiger Lage fest eingeklemmter elastischer Stab, welcher im Zustande des innern Gleichgewichtes oder in schwingender Bewegung begriffen sein kann, u. s. f. Es gehört hieher aber auch eine in irgend einer Lage befestigte Kanone mit der daraus abgeschossenen Kugel, und die Bewegung der letztern ist ebenso, wie die verschiedenen Bewegungen der einzelnen Theile einer Maschine als innere Bewegung derselben zu betrachten.

4) Wenn ein System sich auf eine feste Ebene stützt und zwar mit einem einzigen Punkte, so kann jene als eine der Coordinaten-Ebenen z. B. die der xy, dieser als Coordinaten-Anfang genommen werden, und es wird dauerndes Gleichgewicht bestehen, wenn die zur festen Ebene parallelen fördernden Wirkungen $\Sigma . X$ und $\Sigma . Y$, und alle drehenden Wirkungen für jede Gestalt des Systems Null sind, wofür sich die fünf Bedingungen ergeben:

$$\Sigma . X = 0 \quad , \quad \Sigma . Y = 0$$

$$\Sigma . M_X = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Z = 0 \; .$$

Die fördernde Componente $\Sigma . Z$ ist zugleich allgemeine Resultirende und gibt das Maaß des kleinsten Widerstandes, welchen die feste Ebene zu leisten hat, damit das Gleichgewicht auf die Dauer besteht.

Beispiele für diesen Fall bieten sich nur wenige dar. Ein elastischer schwerer Kreis, welcher sich so auf eine wagrechte Ebene stützt, daß seine Ebene zur Richtung der Schwere parallel ist, wird sich im Zustande des äußeren Gleichgewichtes befinden, während er in einer schwingenden Bewegung begriffen sein kann, bei welchen sein höchster Punkt sich immer in lothrechter Richtung auf und niederbewegt, und die Endpunkte seines horizontalen Durchmessers immer in gleichen Abständen von der durch den Stützpunkt, den Mittelpunkt und den höchsten Punkt gelegten lothrechten Geraden bleiben. Ferner ist hieher zu rechnen eine homogene schwere Kugel, welche sich auf eine horizontale Ebene stützt und im Abkühlen begriffen ist oder welche überhaupt ihre Temperatur ändert. Eine nicht homogene Kugel, deren Schwerpunkt außerhalb

des Mittelpunktes liegt, wird auch mittels der Reibung auf einer geneigten Ebene im Gleichgewicht sein, wenn der Reibungscoeffizient größer ist als die Tangente des spitzen Winkels α, welchen die Normale zu dieser geneigten Ebene mit einer lothrechten Geraden einschließt, und wenn der Abstand des Schwerpunktes vom Mittelpunkte größer ist als $r . sin . \alpha$. (wo r den Halbmesser der Kugel bezeichnet), und zwar in einer solchen Lage, daß der Schwerpunkt lothrecht über dem Stützpunkte liegt (vergl. II. B. §. 128). Dieses äußere Gleichgewicht wird aber im Allgemeinen nur stattfinden, wenn zugleich inneres Gleichgewicht besteht; eine Aenderung der Temperatur z. B. wird auch eine Aenderung in der Lage des Schwerpunktes in Bezug auf den Mittelpunkt und in Bezug auf den Stützpunkt zur Folge haben und eine kleine Drehung der Kugel bewirken, welche selbst wieder durch die Reibung ein Fortwälzen derselben veranlaßt, und die Kugel wird so eine doppelte äußere Bewegung erhalten, eine fortschreitende und eine drehende.

5) Ganz ähnliche Verhältnisse finden auch statt, wenn sich das System mit zwei oder mehreren Punkten, welche in gerader Linie liegen auf die feste Ebene stützt; man kann diese Gerade als Achse der x nehmen und wird dadurch die fünf Bedingungsgleichungen des vorhergehenden Falles auf vier reduziren, nämlich:

$$\Sigma . X = 0 \quad , \quad \Sigma . Y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_X = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Z = 0 \; ,$$

wobei noch vorausgesetzt wird, daß das Moment $\Sigma . M_Y$ nur eine solche Drehung erzeugen will, welche durch den Widerstand der Ebene und die fördernde Componente $\Sigma . Z$ unwirksam gemacht wird, eine Voraussetzung, welche darauf hinaus kommt, daß die dieser fördernden Kraft $\Sigma . Z$ gleiche und parallele allgemeine Resultirende aller Kräfte die Achse der x noch zwischen den äußersten Stützpunkten trifft und, was sich ohnehin versteht, das System gegen die Ebene drückt.

Auch für diesen Fall sind die Beispiele nicht zahlreich; wir finden übrigens leicht einige, wenn wir den schweren Kreis und die Kugel der vorhergehenden Aufgabe durch einen elastischen Ring und einen vollen oder hohlen Cylinder ersetzen.

6) Stützt sich endlich das System mit drei oder mehreren nicht in derselben Geraden liegenden Punkten auf eine Ebene, welche die der xy sei, so genügen die drei Gleichungen:

$$\Sigma . X = 0 \quad , \quad \Sigma . Y = 0 \quad , \quad \Sigma . M_Z = 0$$

um das äußere Gleichgewicht desselben zu sichern, wenn man sich vorher überzeugt hat, daß die drehenden Wirkungen $\Sigma . M_X$ und $\Sigma . M_Y$ auch wirklich durch den Widerstand der Ebene und die fördernde Kraft $\Sigma . Z$

unwirksam gemacht werden, oder daß die Richtung der dieser letztern gleiche und parallele allgemeine Resultirende die feste Ebene in einem Punkte schneidet, welcher innerhalb des durch die geradlinige Verbindung der einzelnen Stützpunkte entstehenden Drei= oder Vielecks liegt.

Beachtenswerthe, wenn auch nur bedingte Beispiele zu diesem Falle liefern uns die fortschaffenden Maschinen (Locomotiven), entweder auf einer horizontalen Ebene unter der Voraussetzung, daß keine Reibung vorhanden ist, oder auf einer geneigten Ebene, für welche der Reibungs=Coeffizient nicht größer ist als die Tangente ihres Neigungswinkels gegen die wagrechte Ebene, und auf welcher die Locomotive sich aufwärts bewegen will. In beiden Fällen wird sich die Locomotive ungeachtet sie in innerer Bewegung begriffen ist, im Zustande des dauernden äußern Gleichgewichtes befinden, und man wird daraus klar erkennen, daß für die Bewegung auf horizontaler Ebene allein die Reibung, für die aufsteigende Bewegung auf einer geneigten Ebene dagegen der Unterschied zwischen der Reibung und der zur geneigten Ebene parallelen Componenten des Gewichtes der Locomotive als die eigentliche fortbewegende äußere Kraft des Systems zu betrachten ist. Ich werde darauf später ausführlicher zurückkommen.

Für die Bestimmung des Druckes, welchen die feste Ebene in den einzelnen Stützpunkten zu erleiden hat, ist in Betreff der beiden letzten Fälle noch zu bemerken, daß sich derselbe, wie bei einem festen System, nur dann ohne Rücksicht auf die innere Beschaffenheit des Systems bestimmen läßt, wenn im fünften Falle nur zwei oder im letzten nur drei Stützpunkte vorhanden sind; bei einer größern Anzahl von Stützpunkten ist, wie schon beim zweiten Falle bemerkt wurde, die Kenntniß der innern Zustände des Systems erforderlich, wenn für jeden einzelnen der Druck bestimmt angegeben werden soll. Um so mehr wird diese Kenntniß nothwendig sein, wenn nicht mehr in einzelnen getrennten Punkten, sondern in einer stetig auf einander folgenden Reihe von Punkten Druck stattfindet.

§. 10.

Die vorhergehenden Bedingungen für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems lassen sich wie bei einem festen System wieder in einer einzigen zusammenfassen, welche durch das **Princip der virtuellen Geschwindigkeiten** ausgesprochen wird. Dazu muß dasselbe aber der Unterscheidung zwischen **innerem** und **äußerem** Gleichgewicht entsprechend enger gefaßt werden, als dies in Bezug auf veränderliche Systeme gewöhnlich geschieht; denn es ist leicht einzusehen, daß

der Lehrsatz von der lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems in seiner allgemeinsten Fassung, wenn man unter dieser lebendigen Kraft die Summe der lebendigen Kräfte aller einzelnen materiellen Punkte des Systems versteht, ebenso wenig einen Unterschied macht zwischen innerer und äußerer Bewegung dieser letztern als derselbe Lehrsatz für ein festes System einen Unterschied zwischen fortschreitender und drehender Bewegung macht; daß also auch das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, welches von jenem Lehrsatze nur den besondern Fall darstellt, wo die anfängliche Geschwindigkeit eines jeden dieser Punkte Null ist und keiner derselben eine Bewegung nach irgend einer Seite hin erhalten kann, in seiner allgemeinsten Fassung keinen Unterschied zwischen innerem und äußerem Gleichgewicht machen, sondern das ganze Gleichgewicht also inneres und äußeres gleichzeitig umfassen wird. Bei dieser allgemeinsten Fassung dieser Lehrsätze dürfen dann aber auch nicht, wie man bisher meistens gethan hat, nur die äußern Kräfte des Systems in Rechnung gebracht werden; sondern es müssen nun für jeden materiellen Punkt desselben alle an demselben thätigen Kräfte, sowohl die inneren, zwischen ihm und den andern dem System angehörigen Punkten wirkenden Kräfte, als die äußern, von Punkten, welche dem veränderlichen System nicht angehören, ausgehenden Wirkungen berücksichtigt werden, und in dieser allgemeinsten Fassung wollen wir die genannten Lehrsätze am Schlusse des gegenwärtigen Buches einer besondern Erörterung unterziehen.

Für jetzt wollen wir unserer Unterscheidung zwischen innern und äußern Zuständen eines veränderlichen Systems gemäß auch zwischen innern und äußern virtuellen Geschwindigkeiten und später ebenso zwischen innerer und äußerer lebendigen Kraft eines veränderlichen Systems unterscheiden, und hier zunächst unter äußerer virtuellen Geschwindigkeit eines Punktes in einem veränderlichen System den kleinen Weg verstehen, der von diesem Punkte in einer sehr kleinen Zeit zurückgelegt wird, vermöge einer sehr kleinen neuen äußern Kraft und unter der Voraussetzung, daß derselbe während dieser kleinen Zeit mit allen übrigen Punkten des Systems und folglich auch mit dem Coordinatensystem der ξ, η und ζ fest verbunden bleibe. Diese Voraussetzung dient hauptsächlich dazu der Vorstellung über die anfängliche Richtung der virtuellen Bewegung zu Hülfe zu kommen; denn das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten bezieht sich zwar streng genommen nur auf den Anfang der virtuellen Bewegung, also auf einen augenblicklichen Zustand des Systems, bei diesem augenblicklichen Zustande ist aber doch ein Bewegenwollen nach einer bestimmten Richtung

mit inbegriffen und diese anfängliche Richtung wird durch die obige Voraussetzung auf die einer äußern Bewegung beschränkt.

Mit Benützung des schon in §. 33 des ersten Buches gegebenen Erklärung von dem virtuellen Momente einer Kraft werden wir daher das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten für das äußere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems so aussprechen:

Wenn sich ein veränderliches System im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet und demselben durch eine oder mehrere sehr kleine neue Kräfte, welche von außen auf das System wirken, irgend eine äußere virtuelle Bewegung mitgetheilt wird, d. h. eine solche, bei welcher alle Punkte des Systems in derselben gegenseitigen Lage bleiben, so ergibt sich für das Verhältniß zwischen der Summe der virtuellen Momente aller ursprünglich an dem System thätigen äußern Kräfte und der virtuellen Geschwindigkeit eines beliebigen aber bestimmten Punktes im System immer der Anfangswerth Null.

Umgekehrt wird ein veränderliches System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befinden, wenn das Verhältniß zwischen der Summe der virtuellen Momente aller an dem System thätigen äußern Kräfte und der virtuellen Geschwindigkeit eines beliebigen aber bestimmten Punktes desselben den Anfangswerth Null erhält für jede äußere virtuelle Bewegung, welche dem für eine sehr kleine Zeit als fest gedachten System durch eine oder mehrere sehr kleine neue äußere Kräfte ertheilt werden können.

Bezeichnen wir demnach wie früher eine der äußern Kräfte mit $P_{,}$, die äußere virtuelle Geschwindigkeit ihres Angriffspunktes mit $\Delta s_{,}$, ihren virtuellen Weg mit $\Delta p_{,}$ und mit Δs die äußere virtuelle Geschwindigkeit eines beliebigen aber bestimmten Punktes im System, so haben wir die Gleichung:

$$\text{Anf:}\ \frac{\Sigma . P_{,} \Delta p_{,}}{\Delta s} = \Sigma . P_{,} \frac{\delta p_{,}}{\delta s_{,}} \frac{\delta s_{,}}{\delta s} = 0 \qquad (8.$$

als einzige nothwendige und genügende Bedingungsgleichung für das äußere Gleichgewicht, und dieses wird wieder ein dauerndes sein, wenn die vorstehende Gleichung für jede innere Gestaltung und jede beliebige äußere virtuelle Bewegung des Systems befriedigt wird; ein vorübergehendes dagegen, wenn dieses nur für eine oder die andere Gestalt desselben stattfindet.

Die Begründung des obigen Princips muß offenbar ganz dieselbe sein, wie für ein festes System, da während der äußern virtuellen Bewegung das System als unveränderlich oder fest vorausgesetzt wird, weßwegen sowohl in dieser Beziehung als auch in Betreff der aus jenem Princip zu ziehenden Folgerungen, sowie rücksichtlich seiner Anwendung einfach auf die §§. 140—146 des II. Buches verwiesen werden kann.

III. Allgemeine Gesetze der äußern Bewegung eines veränderlichen Systems.

§. 11.

Die vorhergehende Erörterung über das äußere Gleichgewicht liefert uns auch die Kennzeichen für den Zustand der äußern Bewegung; ein veränderliches System von materiellen Punkten ist demnach in äußerer Bewegung begriffen, wenn sich in demselben kein solches Coordinaten-System bestimmen läßt, welches fortwährend gegen feste von dem materiellen System ganz unabhängige Coordinaten-Achsen eine unveränderliche Lage behaupten kann, und dieß wird immer der Fall sein, entweder wenn die Bedingungsgleichungen (4) und (5) durch die äußern Kräfte (beschränkende Hindernisse mit eingerechnet) nicht befriedigt werden, oder wenn diesen Genüge gethan wird, aber schon eine noch von frühern äußern Wirkungen herrührende anfängliche äußere Geschwindigkeit vorhanden ist. Es wird einleuchten, daß dieser letztere Fall nur die gleichförmige äußere Bewegung des Systems in sich begreift.

Die allgemeinen Gesetze dieser äußern Bewegung sind daher wieder ganz dieselben, wie bei den festen Systemen und können auch auf demselben Wege abgeleitet werden, wie es für die wichtigsten derselben im letzten Kapitel des vorhergehenden Buches geschehen ist. Es dürfte indessen keine zwecklose Wiederholung sein, wenn wir hier die betreffenden Gesetze noch unter einem andern, den veränderlichen Systemen im Allgemeinen besser entsprechenden Gesichtspunkte ableiten, dabei Gelegenheit nehmen, einige Beispiele für ihre Anwendung bei veränderlichen Systemen aufzuführen, und dann davon die Ableitung einiger andern allgemeinen Gesetze, deren an dem genannten Orte bereits erwähnt worden ist, anzureihen.

Betrachten wir zuerst ein ganz freies System und bezeichnen wir

die Coordinaten eines Punktes M desselben, dessen Masse m sei, in Bezug auf ein festes rechtwinkliges Coordinatensystem am Ende der Zeit t mit x, y, z, die eines zweiten M', dessen Masse m' sei, in demselben Augenblicke mit x', y', z', die eines dritten M'' von der Masse m'' mit x'', y'', z'', u. s. f. Ferner seien wie bisher $X = \Sigma . P \cos \widehat{Px}$, $Y = \Sigma . P \cos \widehat{Py}$, $Z = \Sigma . P \cos \widehat{Pz}$ die zu denselben Coordinaten-Achsen parallelen Componenten der Resultirenden aller an dem Punkte M angreifenden äußern Kräfte P, d. h. der Kräfte, welche von äußern, dem System nicht angehörenden Punkten ausgehen und den Punkt M diesen zu nähern oder von ihnen zu entfernen streben; ebenso seien X', Y', Z' die entsprechenden Componenten der Resultirenden aller äußern Kräfte P', welche an dem Punkte M' angreifen, u. s. f. Endlich sollen J_1, J_2, J_3, etc. die innern Kräfte bezeichnen, welche zwischen dem Punkte M und den übrigen Punkten M', M'', etc. des Systems thätig sind und an M angreifend gedacht werden, J', J_2', J_3', etc. die zwischen dem Punkte M' und allen übrigen M, M'', M''', etc. thätigen und an M' angreifenden Kräfte, u. s. f., und in gleicher Weise sollen F_1, G_1, H_1 die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten der Kraft J_1, dann F_2, G_2, H_2 die der Kraft J_2, etc., F', G', H' die der Kraft J', dann F_2', G_2', H_2' die der Kraft J_2', u. s. f. vorstellen.

Es ist nun offenbar, daß die Bewegung, welche einer der Punkte des Systems annehmen wird und muß, keine andere sein kann, als diejenige, welche er, frei und für sich allein im Raume vorhanden, unter denselben anfänglichen Umständen annehmen würde, wenn er, wie jetzt in seiner Verbindung mit dem System, denselben Kräften P und J unterworfen wäre, von denen die letztern eben seine Abhängigkeit von allen übrigen Punkten des ganzen Systems ausdrücken, da sonst weiter keine Ursache für eine Aenderung seines örtlichen Zustandes vorhanden ist. Die Gesetze der Bewegung des Punktes M werden demnach (Buch I., §. 64) durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} m \frac{d^2 x}{d t^2} &= X + F_1 + F_2 + F_3 + \text{etc.} \\ m \frac{d^2 y}{d t^2} &= Y + G_1 + G_2 + G_3 + \text{etc.} \\ m \frac{d^2 z}{d t^2} &= Z + H_1 + H_2 + H_3 + \text{etc.} \end{aligned}\right\}, \qquad (a.$$

ausgedrückt; die des Punktes M' ebenso durch die Gleichungen:

$$\text{b.)}\quad \begin{cases} m' \dfrac{d^2 x'}{dt^2} = X' + F' + F_2' + F_3' + \text{etc.} \\ m' \dfrac{d^2 y'}{dt^2} = Y' + G' + G_2' + G_3' + \text{etc.} \\ m' \dfrac{d^2 z'}{dt^2} = Z' + H' + H_2' + H_3' + \text{etc.}\,, \end{cases}$$

die des Punktes M″ durch die Gleichungen:

$$\text{c.)}\quad \begin{cases} m'' \dfrac{d^2 x''}{dt^2} = X'' + F'' + F_1'' + F_3'' + \text{etc.} \\ m'' \dfrac{d^2 y''}{dt^2} = Y'' + G'' + G_1'' + G_3'' + \text{etc.} \\ m'' \dfrac{d^2 z''}{dt^2} = Z'' + H'' + H_1'' + H_3'' + \text{etc.}\,, \end{cases}$$

und so durch entsprechende Gleichungen die aller übrigen Punkte des Systems. Beachtet man dann, daß wie in §. 5 erörtert wurde,

$$\begin{array}{lll} F_1 = -F' \,, & G_1 = -G' \,, & H_1 = -H' \\ F_2 = -F'' \,, & G_2 = -G'' \,, & H_2 = -H'' \\ F_2' = -F_1'' \,, & G_2' = -G_1'' \,, & H_2' = -H_1'' \end{array}$$

u. s. f.,

und summirt nun die von den Gleichungen (a), (b), (c), u. s. f., welche derselben Coordinaten-Achse entsprechen, so findet man die neuen Gleichungen:

$$\text{9.)}\quad \begin{cases} \Sigma.m \dfrac{d^2 x}{dt^2} = \Sigma.X \,, \quad \Sigma.m \dfrac{d^2 y}{dt^2} = \Sigma.Y \,, \\ \Sigma.m \dfrac{d^2 z}{dt^2} = \Sigma.Z \,, \end{cases}$$

als diejenigen, welche die allgemeinsten Gesetze der fortschreitenden äußern Bewegung eines freien veränderlichen Systems enthalten, und welche dieselben sind, wie die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung eines festen Systems (Buch II., §. 202).

Verfährt man ferner mit den Gleichungen (a), (b), (c), u. s. f. in Bezug auf jeden der einzelnen materiellen Punkte des Systems, wie es im ersten Buche, §. 71 geschehen ist, um die Gleichungen für die drehende Bewegung eines materiellen Punktes um den Anfangspunkt der Coordinaten oder um deren Achsen abzuleiten, d. h. multiplizirt

man die erste der Gleichungen (a) mit y, die zweite mit x, und zieht dieses Product von jenem ab, u. s. w. so ergeben sich für den Punkt M die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)&=(xY-yX)+(xG_1-yF_1)+(xG_2-yF_2)+\text{etc.}\\
m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)&=(zX-xZ)+(zF_1-xH_1)+(zF_2-xH_2)+\text{etc.}\\
m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)&=(yZ-zY)+(yH_1-zG_1)+(yH_2-zG_2)+\text{etc.}
\end{aligned}\right\}, \text{(a}'.$$

für den Punkt M′ die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
m'\left(x'\frac{d^2y'}{dt^2}-y'\frac{d^2x'}{dt^2}\right)&=(x'Y'-y'X')+(x'G'-y'F')+(x'G_2'-y'F_2')+\text{etc.}\\
m'\left(z'\frac{d^2x'}{dt^2}-x'\frac{d^2z'}{dt^2}\right)&=(z'X'-x'Z')+(z'F'-x'H')+(z'F_2'-x'H_2')+\text{etc.}\\
m'\left(y'\frac{d^2z'}{dt^2}-z'\frac{d^2y'}{dt^2}\right)&=(y'Z'-z'Y')+(y'H'-z'G')+(y'H_2'-z'G_2')+\text{etc.}
\end{aligned}\right\}\text{(b}'.$$

und ähnliche für die übrigen Punkte, und man wird leicht einsehen, daß die eingeklammerten Glieder der rechten Seiten die drehenden Wirkungen der Kräfte P und J um die entsprechende Coordinaten-Achse ausdrücken. Summirt man daher alle diejenigen von den Gleichungen (a′), (b′), u. s. f., welche sich auf dieselbe Achse beziehen, so muß man auf der rechten Seite die entsprechende Componente der resultirenden drehenden Wirkung aller äußern Kräfte P und die aller innern Kräfte J erhalten. Das resultirende Moment dieser letzten Kräfte ist aber, wie in §. 6 gezeigt wurde, immer Null, wie auch das Coordinatensystem in Bezug auf das veränderliche System liegen mag; denn die Glieder $xG_1 - yF_1$ und $x'G' - y'F'$ in den ersten der Gleichungen (a′) und (b′) geben durch Summation mit der Bedingung: $F' = -F_1$, $G' = -G_1$, ein neues Glied von der Form:

$$(x-x')G_1-(y-y')F_1\ ,$$

welches nach dieser Form eine Componente der drehenden Wirkung der an M angreifenden Kraft J_1 in Bezug auf den Punkt M′, dessen Coordinaten x′, y′, z′ sind, also in Bezug auf einen Punkt ausdrückt, der in der Richtung der genannten Kraft liegt und für welchen deren drehende Wirkung nur Null sein kann; auf gleiche Weise verhält es sich aber mit allen übrigen Gliedern der Gleichungen (a′), (b′) u. s. f., welche

drehende Wirkungen der innern Kräfte J ausdrücken, wenn sie entsprechend paarweise summirt werden.

Die Summe aller Gleichungen (a′), (b′), u. s. f. gibt demnach drei neue Gleichungen, in welchen wieder alle innern Kräfte verschwunden sind und welche wie die entsprechenden für feste Systeme gefundenen unter der Form:

$$10.)\quad \begin{cases} \Sigma . m \left(x \dfrac{d^2 y}{d t^2} - y \dfrac{d^2 x}{d t^2} \right) = \Sigma . (x Y - y X) = \Sigma . M_Z \\ \Sigma . m \left(z \dfrac{d^2 x}{d t^2} - x \dfrac{d^2 z}{d t^2} \right) = \Sigma . (z X - x Z) = \Sigma . M_Y \\ \Sigma . m \left(y \dfrac{d^2 z}{d t^2} - z \dfrac{d^2 y}{d t^2} \right) = \Sigma . (y Z - z Y) = \Sigma . M_X \end{cases}$$

das allgemeinste Gesetz der äußern drehenden Bewegung des Systems in Bezug auf den festen Anfangspunkt und die festen Achsen darstellen.

§. 12.

Daß die vorhergehenden Gleichungen sich nur auf den äußern Zustand des Systems beziehen, geht nicht nur daraus hervor, daß darin blos die äußern Kräfte als wirksam erscheinen, sondern besonders daraus, daß sich diese Gleichungen in andere umwandeln lassen, welche nur für den äußern Zustand des Systems Bedeutung haben. Legen wir nämlich durch einen beliebigen Punkt des Systems, dessen Coordinaten am Ende der Zeit t in Bezug auf die festen Achsen mit $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ bezeichnet seien, ein rechtwinkliges Coordinatensystem, dessen Achsen fortwährend parallel zu den festen Achsen bleiben und in Bezug auf welches in demselben Zeitpunkte die Lage irgend eines dem System angehörenden Punktes M von der Masse m durch $x_,$, $y_,$, $z_,$, die eines zweiten M′, dessen Masse m′ sei, durch $x_,'$, $y_,'$, $z_,'$, u. s. f. ausgedrückt werden, so haben wir in jedem Augenblicke zwischen den Coordinaten des Punktes M in Bezug auf die festen und in Bezug auf die beweglichen Achsen die Gleichungen:

$$x = \mathfrak{x} + x_, \;,\qquad y = \mathfrak{y} + y_, \;,\qquad z = \mathfrak{z} + z_, \;,$$

ebenso für den Punkt M′ die Gleichungen:

$$x' = \mathfrak{x} + x_,' \;,\qquad y' = \mathfrak{y} + y_,' \;,\qquad z' = \mathfrak{z} + z_,' \;,$$

u. s. f. für die übrigen Punkte des Systems. Führt man dann die Aenderungsgesetze zweiter Ordnung in Bezug auf t in die Gleichungen (9) ein und beachtet, daß in jedem Augenblicke die Werthe von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$

für alle Punkte des Systems gemeinschaftlich sind, daß also die Summenglieder

$$\Sigma . m \frac{d^2 x}{dt^2} \;,\quad \Sigma . m \frac{d^2 y}{dt^2} \;,\quad \Sigma . m \frac{d^2 z}{dt^2}$$

auch die Formen:

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} \;,\quad M \frac{d^2 y}{dt^2} \;,\quad M \frac{d^2 z}{dt^2}$$

annehmen können, wenn man die Masse $\Sigma . m$ des ganzen Systems durch M bezeichnet, so werden die genannten Gleichungen (9) in folgende verwandelt:

$$\left.\begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} + \Sigma . m \frac{d^2 x_{,}}{dt^2} &= \Sigma . X \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} + \Sigma . m \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} &= \Sigma . Y \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} + \Sigma . m \frac{d^2 z_{,}}{dt^2} &= \Sigma . Z \end{aligned}\right\} , \qquad (11.$$

welche die Gesetze der fortschreitenden Bewegung des beweglichen Coordinaten-Anfangs ausdrücken. Wählt man endlich diesen letztern immer so in dem System, daß der Mittelpunkt der Masse des Systems in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen immer dieselbe Lage behält, daß man also für jeden Zeitpunkt die Bedingungen hat

$$\Sigma . m x_{,} = M a \;,\quad \Sigma . m y_{,} = M b \;,\quad \Sigma . m z_{,} = M c \;,$$

oder

$$\Sigma . m \frac{d^2 x_{,}}{dt^2} = 0 \;,\quad \Sigma . m \frac{d^2 y_{,}}{dt^2} = 0 \;,\quad \Sigma . m \frac{d^2 z_{,}}{dt^2} = 0 \;,$$

so nehmen die vorstehenden Gleichungen (11) die einfache Form an:

$$\left.\begin{aligned} M \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma . X \\ M \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma . Y \\ M \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma . Z \end{aligned}\right\} , \qquad (12.$$

unter welcher sie nun die Gesetze der äußern fortschreitenden Bewegung des gleichsam in einem Punkte vereinigten Systems darstellen, indem sie aussprechen, daß das Gesetz der fortschreitenden Bewegung

eines veränderlichen Systems der äußern Form nach von den innerhalb desselben stattfindenden Wirkungen und Veränderungen unabhängig und in jedem Augenblicke dieselbe ist wie das der fortschreitenden Bewegung eines materiellen Punktes, welcher dieselbe Masse besitzt, wie das ganze System und an welchem die förderndе Resultirende aller an dem System thätigen äußern Kräfte angreift.

Dabei ist indessen nicht zu übersehen, daß im Allgemeinen doch insoferne eine Abhängigkeit von dem innern Zustande des Systems stattfindet, als sich bei ganz strenger Betrachtung die äußern Kräfte immer auch mit der Lage ihrer Angriffspunkte im Systeme ändern, die Componenten X, Y, Z also auch Functionen der Coordinaten $x_{\prime}$, $y_{\prime}$, $z_{\prime}$ sind. Jene Unabhängigkeit findet jedoch in den meisten Fällen wenigstens annähernd statt, weil man für die erste Annäherung an die Wahrheit den Einfluß der innern Aenderungen des Systems auf die Intensität der äußern Kräfte vernachlässigen kann und wegen der Unzulänglichkeit unserer Analysis vernachlässigen muß.

Am einfachsten wird man den Mittelpunkt der Masse selbst als jenen Punkt annehmen, welcher das ganze System vorstellt, wodurch dann die Gleichungen (12) die besondere Form erhalten:

$$12^{a}.)\quad \left\{ \begin{aligned} M\frac{d^2 \mathrm{X}}{dt^2} &= \Sigma . X, \\ M\frac{d^2 \mathrm{Y}}{dt^2} &= \Sigma . Y, \\ M\frac{d^2 \mathrm{Z}}{dt^2} &= \Sigma . Z, \end{aligned} \right.$$

nur muß man dabei beachten, daß hier bei veränderlichen Systemen dieser Punkt nicht mehr ein für allemal bestimmt ist, wie bei den festen Systemen, sondern in jedem Augenblicke eine andere Lage im System hat, daß daher die Gleichungen (12) für veränderliche Systeme nicht mehr ebenso gut anwendbar sind, wie für feste, oder die fortschreitende Bewegung nicht mehr ebenso anschaulich und bestimmt angeben, wie dort, abgesehen davon, daß strenggenommen auch die Kräfte X, Y, Z, u. s. f. durch die Aenderung der Gestalt des Systems andere Werthe erhalten können.

Betrachten wir z. B. die Erde mit ihrem Monde als ein veränderliches System, so schließen wir aus dem Vorhergehenden, daß der

Mittelpunkt der Masse dieser beiden Körper, welcher im Mittel etwa um $\frac{60}{76}$ eines Erdhalbmessers von dem Mittelpunkte der Erde entfernt ist, die in §§. 85—87 des ersten Buches untersuchte elliptische Bewegung um die Sonne annehmen würde, wenn an denselben keine andere Kraft thätig wäre, als die zwischen ihnen selbst stattfindende anziehende Wirkung, welche hier als innere Kraft unberücksichtigt bleibt und die zwischen ihnen und der Sonne thätigen anziehenden Kräfte, welche die äußern bewegenden Kräfte bilden, und unter der fernern Voraussetzung, daß die Veränderungen in der anziehenden Wirkung zwischen der Sonne und der Erde und dem Monde, welche davon herrühren, daß diese beiden Körper einzeln bald mehr bald weniger von dem Mittelpunkte der Sonne entfernt sind, als der Mittelpunkt ihrer beiden Massen, vernachlässigt werden dürfen.

Ebenso bildet die Sonne selbst mit den sie umgebenden Planeten und deren Satelliten ein veränderliches System, dessen Massenmittelpunkt wahrscheinlich den Gesetzen der elliptischen Bewegung um einen mächtigen Centralkörper folgt, unbeirrt durch die Bewegungen, welche innerhalb des Systems selbst vor sich gehen.

Ein anderes für die theoretische Anschauung beachtenswerthes Beispiel bietet sich uns dar in einer Kugel, welche während ihres Laufes durch eine innere Explosion in mehrere Stücke zersprengt wird. Wenn die Schwere constant und kein Luftwiderstand vorhanden wäre, würde der Mittelpunkt der Masse aller einzelnen Stücke denselben Weg und mit derselben Geschwindigkeit verfolgen, wie der Schwerpunkt einer gleichen unzersprengten Kugel unter gleichen anfänglichen Umständen.

In dem einfacheren Falle, wo an dem System keine äußeren fördernden Kräfte thätig sind, oder diese sich in jedem Augenblicke das Gleichgewicht halten, wird der Mittelpunkt der Masse des Systems immer eine gleichförmige geradlinige Bewegung annehmen, da für diesen Fall die Gleichungen (12^a) in

$$\frac{d^2\mathbf{X}}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2\mathbf{Y}}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2\mathbf{Z}}{dt^2} = 0$$

übergehen. Zwei Kugeln, welche sich auf einer horizontalen Ebene ohne Reibung mit constanten Geschwindigkeiten bewegen, und in ihrer Bewegung auf einandertreffen, werden gegenseitig die Richtungen und Geschwindigkeiten ihrer Bewegungen durch den S t o ß ändern; die Bewegung des Mittelpunktes ihrer Masse wird aber nach dem Stoße wie vor demselben eine gleichförmige geradlinige sein und nach wie vor dieselbe Geschwindigkeit besitzen.

Man hat dem durch die Gleichungen (12ᵃ) ausgesprochenen Satze den Namen: **Princip von der Erhaltung der Bewegung des Schwerpunktes** (Mittelpunktes der Masse) beigelegt.

§. 13.

Nehmen wir nun mit den Gleichungen (10) ähnliche Umformungen vor, wie mit den Gleichungen (9), indem wir wieder die Lage der einzelnen Punkte des Systems auf ein zu den festen Achsen parallel fort sich bewegendes Coordinatensystem der $x_,$, $y_,$, $z_,$ beziehen, dessen Anfangspunkt durch die Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in Bezug auf die festen Achsen bestimmt, über welchen aber noch keine besondere Wahl getroffen ist, so erhalten wir mit Berücksichtigung der Gleichungen (11) zuerst folgende Gleichungen für die äußere drehende Bewegung des Systems:

$$13.)\left\{\begin{aligned} &\Sigma.m\left(x_,\frac{d^2y_,}{dt^2}-y_,\frac{d^2x_,}{dt^2}\right)+\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\Sigma.mx_,-\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\Sigma.my_,=\Sigma(x_,Y-y_,X),\\ &\Sigma.m\left(z_,\frac{d^2x_,}{dt^2}-x_,\frac{d^2z_,}{dt^2}\right)+\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\Sigma.mz_,-\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\Sigma.mx_,=\Sigma(z_,X-x_,Z),\\ &\Sigma.m\left(y_,\frac{d^2z_,}{dt^2}-z_,\frac{d^2y_,}{dt^2}\right)+\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\Sigma.my_,-\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\Sigma.mz_,=\Sigma(y_,Z-z_,Y),\end{aligned}\right.$$

und unter der weitern Voraussetzung, daß der Anfangspunkt der beweglichen Coordinatenachsen entweder eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt oder mit dem Mittelpunkte der Masse des Systems zusammenfällt, daß man also entweder

$$\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}=0\quad,\quad\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}=0\quad,\quad\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}=0$$

hat oder

$$\Sigma.mx_,=0\quad,\quad\Sigma.my_,=0\quad,\quad\Sigma.mz_,=0\;,$$

nehmen diese letztern Gleichungen wieder die einfache Form an:

$$14.)\left\{\begin{aligned} &\Sigma.m\left(x_,\frac{d^2y_,}{dt^2}-y_,\frac{d^2x_,}{dt^2}\right)=\Sigma.M_{z_,}\;,\\ &\Sigma.m\left(z_,\frac{d^2x_,}{dt^2}-x_,\frac{d^2z_,}{dt^2}\right)=\Sigma.M_{y_,}\;,\\ &\Sigma.m\left(y_,\frac{d^2z_,}{dt^2}-z_,\frac{d^2y_,}{dt^2}\right)=\Sigma.M_{x_,}\;,\end{aligned}\right.$$

worin $\Sigma . M_{Z,}$, $\Sigma . M_{Y,}$ und $\Sigma . M_{X,}$ die in den Gleichungen (13) ausführlich bezeichneten Componenten des resultirenden Momentes aller äußern Kräfte in Bezug auf den beweglichen Anfangspunkt vorstellen.

Unter dieser Form, in welcher die Coordinaten x, y, z des beweglichen Coordinaten-Anfangs ganz verschwunden sind, sprechen unsere Gleichungen für die äußere drehende Bewegung je nachdem man die eine oder die andere der beiden vorhergehenden Bedingungen zu Grunde legt, einmal aus,

daß die äußere drehende Bewegung eines freien veränderlichen Systems in Bezug auf parallel-bewegliche Coordinaten-Achsen, deren Anfangspunkt eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt, dieselbe ist, als wenn dieser Punkt fest gedacht wird; dann sagen sie aber auch,

daß jedes freie veränderliche System während der nach irgend einem Gesetze fortschreitenden Bewegung des Mittelpunktes seiner Masse sich vermöge des resultirenden Momentes der an ihm thätigen äußern Kräfte um diesen Punkt, wie um einen festen Punkt herumdreht, oder genauer und für die Anschauung klarer ausgedrückt, daß das jeweilige augenblickliche resultirende Moment aller äußern Kräfte dem in diesem Augenblicke als unveränderlich gedachten System in Bezug auf drei durch den Mittelpunkt der Masse gelegte Achsen dieselben Winkelbeschleunigungen zu ertheilen strebt, als wenn diese Achsen fest oder unverrückbar wären. Denn es dürfte unserm Vorstellungsvermögen im Allgemeinen etwas zu viel zugemuthet sein, sich diese drehende Bewegung selbst und nicht blos einen augenblicklichen Zustand derselben, klar zu machen; da uns in diesem Falle nicht nur die deutliche Kenntniß von der veränderlichen Lage des Mittelpunktes der Masse in dem System fehlt, wie in dem vorhergehenden Falle, sondern auch die klare Vorstellung von der gleichfalls veränderlichen Lage bestimmter das System selbst ersetzender Achsen, deren drehende Bewegungen eigentlich durch die obigen Gleichungen dargestellt werden. Bei den festen Systemen haben uns dazu die Hauptachsen im Schwerpunkt gedient und die Vorstellung wesentlich erleichtert, weil diese ihre Lage im System fortwährend unverändert beibehalten, und daher, einmal bestimmt oder bekannt, das System selbst vertreten und gleichsam die Grundlage bilden, auf welcher sich das System in jedem Augenblicke aufbauen läßt, während bei den veränderlichen Systemen erst die Veränderungen im Innern bekannt sein müssen und jene Achsen für irgend eine Gestaltung desselben besonders

zu bestimmen sind, wozu hier noch kommt, daß wegen der Veränderlichkeit in der Gestalt auch die Massenmomente des Systems in Bezug auf die genannten Achsen veränderlich sind, und daher die äußere drehende Bewegung desselben in Bezug auf diese Achsen im Allgemeinen nicht unabhängig von der innern betrachtet werden kann, wenn man auch von den durch die Aenderung der Gestalt des Systems hervorgerufenen Aenderungen der Intensität der Kräfte Umgang nimmt.

§. 14.

Diese Abhängigkeit der äußern drehenden Bewegung von der innern wird deutlicher ausgesprochen, wenn wir die Gleichungen (14) wie bei den festen Systemen wieder in andere umwandeln, welche sich auf drei Achsen beziehen, die selbst eine drehende Bewegung besitzen und für die man dann auch, insofern es sich blos um die äußere Form der Gesetze der drehenden Bewegung des Systems handelt, die augenblicklichen Hauptachsen im Mittelpunkte der Masse desselben nehmen kann, da man diese für den genannten Zweck ebenso als bekannt voraussetzen darf, wie den Mittelpunkt der Masse bei der Betrachtung der fortschreitenden Bewegung. Bezeichnen wir dazu die Coordinaten eines Punktes M, dessen Masse m sei, in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen einfach mit x, y, z, in Bezug auf die sich drehenden Achsen, welche mit jenen den Anfangspunkt gemeinschaftlich haben, mit ξ, η, ζ, so finden zwischen diesen Größen wieder die Beziehungen statt (vergl. Buch II., §. 184 [a]):

$$\text{a.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} x = a\xi + a'\eta + a''\zeta\,, \\ y = b\xi + b'\eta + b''\zeta\,, \\ z = c\xi + c'\eta + c''\zeta\,, \end{array} \right.$$

worin die Coeffizienten a, b, c, etc. die an dem genannten Orte angegebene Bedeutung haben. Bei einem veränderlichen System sind aber die Coordinaten ξ, η, ζ nicht mehr unabhängig von der Zeit, sondern veränderlich und die vorhergehenden Beziehungen geben daher folgende Aenderungsgesetze in Bezug auf t:

$$\text{b.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = a\frac{d\xi}{dt} + a'\frac{d\eta}{dt} + a''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{da}{dt} + \eta\frac{da'}{dt} + \zeta\frac{da''}{dt}\,, \\ \frac{dy}{dt} = b\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + b''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{db}{dt} + \eta\frac{db'}{dt} + \zeta\frac{db''}{dt}\,, \\ \frac{dz}{dt} = c\frac{d\xi}{dt} + c'\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{dc}{dt} + \eta\frac{dc'}{dt} + \zeta\frac{dc''}{dt}\,, \end{array} \right.$$

als Beziehungen zwischen den zu den Achsen der x, y, z parallelen Componenten $u_x = \frac{dx}{dt}$, $u_y = \frac{dy}{dt}$, $u_z = \frac{dz}{dt}$ der relativen Geschwindigkeit v des Punktes M in Bezug auf diese parallel fortschreitenden Achsen, den Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ seiner Geschwindigkeit in Bezug auf die sich drehenden Achsen und den Winkeländerungen dieser letztern Achsen gegen die ersten.

Multiplizirt man nun diese Gleichungen der Reihe nach zuerst mit a, b, c, dann mit a', b', c', ebenso mit a'', b'', c'' und summirt jedesmal die Producte, so ergeben sich mit Beachtung der zwischen den Cosinus a, b, c, etc. stattfindenden Bedingungsgleichungen und ihren Aenderungsgesetzen in Bezug auf t (vergl. Buch II., §. 184) die neuen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} &= \frac{d\xi}{dt} + \mathfrak{q}\zeta - \mathfrak{r}\eta \\ a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt} &= \frac{d\eta}{dt} + \mathfrak{r}\xi - \mathfrak{p}\zeta \\ a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} &= \frac{d\zeta}{dt} + \mathfrak{p}\eta - \mathfrak{q}\xi \end{aligned}\right\}, \qquad (c.$$

in welchen die Coeffizienten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ die in §. 185 daselbst angegebene Bedeutung haben. Man wird ferner leicht einsehen, daß die linken Seiten der Gleichungen (c) die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten u_ξ, u_η, u_ζ der Geschwindigkeit v des Punktes M, welche von den Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ wohl zu unterscheiden sind, vorstellen und daß folglich die Differenzen:

$$\left.\begin{aligned} \overset{\frown}{u_\xi} &= a\frac{dx}{dt} + b\frac{dy}{dt} + c\frac{dz}{dt} - \frac{d\xi}{dt} \\ \overset{\frown}{u_\eta} &= a'\frac{dx}{dt} + b'\frac{dy}{dt} + c'\frac{dz}{dt} - \frac{d\eta}{dt} \\ \overset{\frown}{u_\zeta} &= a''\frac{dx}{dt} + b''\frac{dy}{dt} + c''\frac{dz}{dt} - \frac{d\zeta}{dt} \end{aligned}\right\} \qquad (d.$$

die zu den Achsen der ξ, η und ζ parallelen Componenten $\overset{\frown}{u_\xi}$, $\overset{\frown}{u_\eta}$, $\overset{\frown}{u_\zeta}$ einer Geschwindigkeit $\overset{\frown}{v}$ sind, welche der Punkt M in Bezug auf das Coordinatensystem der x, y, z besitzen würde, wenn er vom Ende der

Zeit t an mit den Achsen der ξ, η, ζ fest verbunden bliebe, und welche man seine äußere relative Geschwindigkeit in Bezug auf die erstern Achsen nennen kann, während $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ die Componenten seiner innern relativen Geschwindigkeit in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ ausdrücken. Mit der angedeuteten Bezeichnung nehmen also die Gleichungen (c) die Form an:

$$\text{e.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \overset{\frown}{u_\xi} &= \mathfrak{q}\zeta - \mathfrak{r}\eta\ , \\ \overset{\frown}{u_\eta} &= \mathfrak{r}\xi - \mathfrak{p}\zeta\ , \\ \overset{\frown}{u_\zeta} &= \mathfrak{p}\eta - \mathfrak{q}\xi\ , \end{aligned} \right.$$

und geben dann zwischen den Componenten $\overset{\frown}{u_\xi}$, $\overset{\frown}{u_\eta}$, $\overset{\frown}{u_\zeta}$ und den Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ dieselben Beziehungen, wie wir sie für die Componenten u_ξ, u_η, u_ζ bei einem festen System erhalten haben (Buch II., §. 186, u. f. f.).

Bezeichnen wir ferner, wie am genannten Orte, mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die zu den Achsen der x, y, z parallelen Componenten $m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du_x}{dt}$, $m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{du_y}{dt}$, $m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{du_z}{dt}$ der Kraft $\mathfrak{P}$, welche dem Punkte M, wenn er für sich allein vorhanden wäre, unter denselben anfänglichen Umständen dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie in seiner Verbindung mit dem System besitzt, mit $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$ die Componenten derselben Kraft, parallel zu den Achsen der ξ, η, ζ genommen, und mit $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$ ihre drehenden Wirkungen um die genannten Achsen, so erhalten wir zuerst durch die Beziehungen:

$$\left\{ \begin{aligned} u_x &= a u_\xi + a' u_\eta + a'' u_\zeta \\ u_y &= b u_\xi + b' u_\eta + b'' u_\zeta \\ u_z &= c u_\xi + c' u_\eta + c'' u_\zeta \end{aligned} \right.$$

für die Componenten $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die Werthe:

$$\text{f.)} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{X} &= m\left(a\frac{du_\xi}{dt} + a'\frac{du_\eta}{dt} + a''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{da}{dt} + u_\eta\frac{da'}{dt} + u_\zeta\frac{da''}{dt}\right), \\ \mathfrak{Y} &= m\left(b\frac{du_\xi}{dt} + b'\frac{du_\eta}{dt} + b''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{db}{dt} + u_\eta\frac{db'}{dt} + u_\zeta\frac{db''}{dt}\right), \\ \mathfrak{Z} &= m\left(c\frac{du_\xi}{dt} + c'\frac{du_\eta}{dt} + c''\frac{du_\zeta}{dt} + u_\xi\frac{dc}{dt} + u_\eta\frac{dc'}{dt} + u_\zeta\frac{dc''}{dt}\right). \end{aligned} \right.$$

Wir haben aber auch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}' &= a\mathfrak{X} + b\mathfrak{Y} + c\mathfrak{Z}\\ \mathfrak{Y}' &= a'\mathfrak{X} + b'\mathfrak{Y} + c'\mathfrak{Z}\\ \mathfrak{Z}' &= a''\mathfrak{X} + b''\mathfrak{Y} + c''\mathfrak{Z}\end{aligned}\right\},$$

und diese nehmen durch Einführung der vorhergehenden Werthe für $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ und mit Beachtung der erwähnten Bedingungsgleichungen zwischen den Cosinus a, b, c, und deren Aenderungsgesetzen in Bezug auf t die Form an:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{X}' &= m\left(\frac{du_\xi}{dt} + \mathfrak{q}u_\zeta - \mathfrak{r}u_\eta\right)\\ \mathfrak{Y}' &= m\left(\frac{du_\eta}{dt} + \mathfrak{r}u_\xi - \mathfrak{p}u_\zeta\right)\\ \mathfrak{Z}' &= m\left(\frac{du_\zeta}{dt} + \mathfrak{p}u_\eta - \mathfrak{q}u_\xi\right)\end{aligned}\right\}. \qquad (g.$$

Zuletzt haben wir dann wieder für die drehenden Wirkungen der Kraft $\mathfrak{P}$ die Ausdrücke:

$$\mathfrak{M}_\Xi = \mathfrak{Z}'\eta - \mathfrak{Y}'\zeta \quad , \qquad \mathfrak{M}_H = \mathfrak{X}'\zeta - \mathfrak{Z}'\xi \, ,$$
$$\mathfrak{M}_Z = \mathfrak{Y}'\xi - \mathfrak{X}'\eta$$

oder mit den vorhergehenden Werthen (h.

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{M}_\Xi &= m\left(\eta\frac{du_\zeta}{dt} - \zeta\frac{du_\eta}{dt}\right) - mu_\xi(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) + m\mathfrak{p}(\eta u_\eta + \zeta u_\zeta)\\ \mathfrak{M}_H &= m\left(\zeta\frac{du_\xi}{dt} - \xi\frac{du_\zeta}{dt}\right) - mu_\eta(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta) + m\mathfrak{q}(\xi u_\xi + \zeta u_\zeta)\\ \mathfrak{M}_Z &= m\left(\xi\frac{du_\eta}{dt} - \eta\frac{du_\xi}{dt}\right) - mu_\zeta(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta) + m\mathfrak{r}(\xi u_\xi + \eta u_\eta)\end{aligned}\right\}.$$

Im jetzigen Falle geben aber die Gleichungen (c) die Aenderungsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}\frac{du_\xi}{dt} &= \frac{d^2\xi}{dt^2} + \mathfrak{q}\frac{d\zeta}{dt} - \mathfrak{r}\frac{d\eta}{dt} + \zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta\frac{d\mathfrak{r}}{dt}\\ \frac{du_\eta}{dt} &= \frac{d^2\eta}{dt^2} + \mathfrak{r}\frac{d\xi}{dt} - \mathfrak{p}\frac{d\zeta}{dt} + \xi\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt}\\ \frac{du_\zeta}{dt} &= \frac{d^2\zeta}{dt^2} + \mathfrak{p}\frac{d\eta}{dt} - \mathfrak{q}\frac{d\xi}{dt} + \eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi\frac{d\mathfrak{q}}{dt}\end{aligned}\right\},$$

und mit diesen erhält man nun, wenn sie in die Gleichungen (h) eingeführt werden, nachstehende Werthe für die drehenden Wirkungen $\mathfrak{M}_\Xi$, $\mathfrak{M}_H$, $\mathfrak{M}_Z$:

$$\text{i.)}\begin{cases}
\mathfrak{M}_\Xi = m(\eta^2+\zeta^2)\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + 2m\mathfrak{p}\left(\eta\frac{d\eta}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}\right) - m\xi\eta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} \\
\qquad - m\xi\zeta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - m(\mathfrak{q}\zeta-\mathfrak{r}\eta)(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta) \\
\qquad + m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) - 2m\frac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta)\,, \\
\mathfrak{M}_H = m(\xi^2+\zeta^2)\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + 2m\mathfrak{q}\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\zeta\frac{d\zeta}{dt}\right) - m\xi\eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \\
\qquad - m\eta\zeta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - m(\mathfrak{r}\xi-\mathfrak{p}\zeta)(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta) \\
\qquad + m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) - 2m\frac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{r}\zeta)\,, \\
\mathfrak{M}_Z = m(\xi^2+\eta^2)\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + 2m\mathfrak{r}\left(\xi\frac{d\xi}{dt}+\eta\frac{d\eta}{dt}\right) - m\xi\zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} \\
\qquad - m\zeta\eta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - m(\mathfrak{p}\eta-\mathfrak{q}\xi)(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta+\mathfrak{r}\zeta) \\
\qquad + m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) - 2m\frac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi+\mathfrak{q}\eta)\,.
\end{cases}$$

Vereinigen wir endlich die drehenden Wirkungen aller Kräfte $\mathfrak{P}$, deren so viele sind, als es materielle Punkte im System gibt, in Bezug auf dieselbe Achse zu einem resultirenden Moment, und bezeichnen die nun veränderlichen Massenmomente des Systems in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ, wie im vorhergehenden Buche, mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, so daß man hat

$$\mathfrak{A} = \Sigma.m(\eta^2+\zeta^2)\,,\quad \mathfrak{B} = \Sigma.m(\xi^2+\zeta^2)\,,\quad \mathfrak{C} = \Sigma.m(\xi^2+\eta^2)\,,$$

ferner die Summen:

$$\Sigma.m\xi\zeta\,,\quad \Sigma.m\xi\zeta\,,\quad \Sigma.m\eta\zeta$$

der Reihe nach mit

$$\mathfrak{F}\,,\quad \mathfrak{G}\,,\quad \mathfrak{H}$$

indem wir dabei beachten, daß die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ und $\mathfrak{r}$ allen Punkten des Systems gemeinschaftlich sind, da sie blos von den Cosinus a, b, c, etc., also von der augenblicklichen Lage der Achsen der ξ, η, ζ gegen die Achsen der x, y, z abhängen, so ergeben sich durch Vergleichung dieser drehenden Gesammtwirkungen der Kräfte $\mathfrak{P}$ mit den Componenten $\Sigma.M_{\Xi}$, $\Sigma.M_{H}$, $\Sigma.M_{Z}$ des resultirenden Momentes aller äußern Kräfte P, da die resultirenden Wirkungen der innern Kräfte J auch in Bezug auf die Achsen der ξ, η und ζ Null sind, folgende Gleichungen für die äußere drehende Bewegung des Systems:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{F}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \Sigma.M_{\Xi} + (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} \\
&\quad - \mathfrak{p}(\mathfrak{F}\mathfrak{r} - \mathfrak{G}\mathfrak{q}) + \mathfrak{H}(\mathfrak{q}^2 - \mathfrak{r}^2) \\
&\quad - \Sigma.m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) \\
\frac{d.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{dt} - \mathfrak{F}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} &= \Sigma.M_{H} + (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\mathfrak{r} \\
&\quad - \mathfrak{q}(\mathfrak{H}\mathfrak{p} - \mathfrak{F}\mathfrak{r}) + \mathfrak{G}(\mathfrak{r}^2 - \mathfrak{p}^2) \\
&\quad - \Sigma.m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta) \\
\frac{d.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{dt} - \mathfrak{G}\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \mathfrak{H}\frac{d\mathfrak{q}}{dt} &= \Sigma.M_{Z} + (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} \\
&\quad - \mathfrak{r}(\mathfrak{G}\mathfrak{q} - \mathfrak{H}\mathfrak{p}) + \mathfrak{F}(\mathfrak{p}^2 - \mathfrak{q}^2) \\
&\quad - \Sigma.m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\frac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta)
\end{aligned}\right\}\ldots(15.$$

Mit diesen Gleichungen, welche nun durch die beiden letzten Glieder einer jeden den Einfluß der innern Veränderungen auf die äußere drehende Bewegung darthun, sind aber noch die Beziehungen zu verbinden zwischen den augenblicklichen Winkelgeschwindigkeiten und den Functionen der Winkel, welche von den Achsen der ξ, η, ζ und den Achsen der x, y, z gebildet werden oder welche die Lage jener Achsen gegen diese bestimmen, nämlich mit den Gleichungen:

$$16.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p} = -\dfrac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\cos\psi + \dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{q} = \dfrac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\sin\psi - \dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{r} = \dfrac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \dfrac{d\psi}{dt}\,, \end{cases}$$

die hier ganz auf dieselbe Weise sich ergeben, wie bei der Untersuchung der drehenden Bewegung eines festen Systems (Buch II., §. 187.)

Die Gleichungen (15) beziehen sich noch auf beliebige Achsen der ξ, η und ζ; will man also die augenblicklichen Hauptachsen des Systems für diese Coordinatenachsen nehmen, so hat man mit denselben die Bedingungen

$$17.)\quad \mathfrak{F} = \Sigma.m\xi\eta = 0\,,\quad \mathfrak{G} = \Sigma.m\xi\zeta = 0\,,\quad \mathfrak{H} = \Sigma.m\eta\zeta = 0$$

zu verbinden, wodurch dieselben zwar die einfache Form:

$$18.)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} + \Sigma.M_x \\ \qquad - \Sigma.m\left(\eta\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\dfrac{d^2\eta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\dfrac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta), \\ \dfrac{d.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \Sigma.M_y \\ \qquad - \Sigma.m\left(\zeta\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\dfrac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta), \\ \dfrac{d.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \Sigma.M_z \\ \qquad - \Sigma.m\left(\xi\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\dfrac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta), \end{cases}$$

annehmen, für die weitere Untersuchung besonderer Fälle aber wegen der Veränderlichkeit der Größen ξ, η, ζ und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, wegen der neuen Bedingungen (17) und wegen der Schwierigkeit, welche die Bestimmung der augenblicklichen Lage der Hauptachsen darbietet, kaum geeignet sein dürften. Man wird in den meisten Fällen viel besser thun, wenn man den Achsen der ξ, η, ζ eine entsprechende drehende Bewegung vorschreibt, also die Winkel ω, ψ und ϑ in Function der Zeit bestimmt, daraus mittels der Gleichungen (16) die Werthe von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ableitet und dann die Gleichungen (15) dazu anwendet, um die Gesetze der innern Bewegung des Systems in Bezug auf jene

Achsen zu untersuchen. Durch dieses Verfahren wird die äußere drehende Bewegung des Systems eine willkürlich angenommene, welche man aber doch so wählen wird, daß sie sich der Bewegung des Systems soviel wie möglich anschließt.

Bemerken wir schließlich noch, daß einerseits die Gleichungen (18) in die Gleichungen (133) des vorhergehenden Buches (§. 190) übergehen, wenn man ξ, η, ζ unveränderlich nimmt, das System also ein festes wird, und daß anderseits die Gleichungen (15), wenn die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ Null werden, d. h. wenn man bestimmt, daß die Achsen der ξ, η, ζ keine drehende Bewegung besitzen sollen, die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \left(\eta \frac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta \frac{d^2\eta}{dt^2}\right) &= \Sigma . M_{\Xi} \\ \Sigma . m \left(\zeta \frac{d^2\xi}{dt^2} - \xi \frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) &= \Sigma . M_{H} \\ \Sigma . m \left(\xi \frac{d^2\eta}{dt^2} - \eta \frac{d^2\xi}{dt^2}\right) &= \Sigma . M_{Z} \end{aligned}\right\},$$

in welcher sie wieder ganz mit den Gleichungen (14) übereinkommen, wie dieses nach jener Voraussetzung offenbar der Fall sein muß.

§. 15.

In dem einfacheren Falle, wo die Momente der an einem unveränderlichen System thätigen äußern Kräfte Null sind in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen, läßt sich das Gesetz der drehenden Bewegung dieses Systems in Bezug auf das genannte Coordinatensystem wie bei einem einzigen materiellen Punkte in mehrfacher Weise aussprechen oder deuten.

Der genannte Fall tritt insbesondere ein, einmal wie beim materiellen Punkte (Buch I., §. 71), 1) wenn die Resultirende der an demselben Punkte angreifenden äußern Kräfte für alle Punkte des Systems Null ist, 2) wenn die Richtung dieser Resultirenden für alle Punkte des Systems fortwährend durch einen und denselben Punkt geht und dieser als Anfang des unbeweglichen Coordinatensystems genommen wird, und dann allgemeiner 3) wenn alle an dem System thätigen äußern Kräfte immer eine einzige Resultirende haben und die Richtung dieser immer durch den Anfang der festen Coordinaten geht (Buch II., §§. 83 und 87).

$$16.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p} = -\dfrac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\cos\psi + \dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{q} = \dfrac{d\omega}{dt}\sin\vartheta\sin\psi - \dfrac{d\vartheta}{dt}\sin\psi\,, \\ \mathfrak{r} = \dfrac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \dfrac{d\psi}{dt}\,, \end{cases}$$

die hier ganz auf dieselbe Weise sich ergeben, wie bei der Untersuchung der drehenden Bewegung eines festen Systems (Buch II., §. 187.)

Die Gleichungen (15) beziehen sich noch auf beliebige Achsen der ξ, η und ζ; will man also die augenblicklichen Hauptachsen des Systems für diese Coordinatenachsen nehmen, so hat man mit denselben die Bedingungen

$$17.)\quad \mathfrak{F} = \Sigma.m\xi\eta = 0\,,\quad \mathfrak{G} = \Sigma.m\xi\zeta = 0\,,\quad \mathfrak{H} = \Sigma.m\eta\zeta = 0$$

zu verbinden, wodurch dieselben zwar die einfache Form:

$$18.)\quad \begin{cases} \dfrac{d.\mathfrak{A}\mathfrak{p}}{dt} = (\mathfrak{B}-\mathfrak{C})\,\mathfrak{q}\mathfrak{r} + \Sigma.M_{\Xi} \\ \qquad - \Sigma.m\left(\eta\dfrac{d^2\zeta}{dt^2} - \zeta\dfrac{d^2\eta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\dfrac{d\xi}{dt}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta), \\ \dfrac{d.\mathfrak{B}\mathfrak{q}}{dt} = (\mathfrak{C}-\mathfrak{A})\,\mathfrak{p}\mathfrak{r} + \Sigma.M_{H} \\ \qquad - \Sigma.m\left(\zeta\dfrac{d^2\xi}{dt^2} - \xi\dfrac{d^2\zeta}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\dfrac{d\eta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta), \\ \dfrac{d.\mathfrak{C}\mathfrak{r}}{dt} = (\mathfrak{A}-\mathfrak{B})\,\mathfrak{p}\mathfrak{q} + \Sigma.M_{Z} \\ \qquad - \Sigma.m\left(\xi\dfrac{d^2\eta}{dt^2} - \eta\dfrac{d^2\xi}{dt^2}\right) + 2\Sigma.m\dfrac{d\zeta}{dt}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta), \end{cases}$$

annehmen, für die weitere Untersuchung besonderer Fälle aber wegen der Veränderlichkeit der Größen ξ, η, ζ, und $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, wegen der neuen Bedingungen (17) und wegen der Schwierigkeit, welche die Bestimmung der augenblicklichen Lage der Hauptachsen darbietet, kaum geeignet sein dürften. Man wird in den meisten Fällen viel besser thun, wenn man den Achsen der ξ, η, ζ eine entsprechende drehende Bewegung vorschreibt, also die Winkel ω, ψ und ϑ in Function der Zeit bestimmt, daraus mittels der Gleichungen (16) die Werthe von $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ ableitet und dann die Gleichungen (15) dazu anwendet, um die Gesetze der innern Bewegung des Systems in Bezug auf jene

Achsen zu untersuchen. Durch dieses Verfahren wird die äußere drehende Bewegung des Systems eine willkürlich angenommene, welche man aber doch so wählen wird, daß sie sich der Bewegung des Systems soviel wie möglich anschließt.

Bemerken wir schließlich noch, daß einerseits die Gleichungen (18) in die Gleichungen (133) des vorhergehenden Buches (§. 190) übergehen, wenn man ξ, η, ζ unveränderlich nimmt, das System also ein festes wird, und daß andrerseits die Gleichungen (15), wenn die Winkelgeschwindigkeiten p, q, r Null werden, d. h. wenn man bestimmt, daß die Achsen der ξ, η, ζ keine drehende Bewegung besitzen sollen, die Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m\left(\eta\frac{d^2\zeta}{dt^2}-\zeta\frac{d^2\eta}{dt^2}\right) &= \Sigma . M_{\Xi} \\ \Sigma . m\left(\zeta\frac{d^2\xi}{dt^2}-\xi\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) &= \Sigma . M_{H} \\ \Sigma . m\left(\xi\frac{d^2\eta}{dt^2}-\eta\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) &= \Sigma . M_{Z} \end{aligned}\right\},$$

in welcher sie wieder ganz mit den Gleichungen (14) übereinkommen, wie dieses nach jener Voraussetzung offenbar der Fall sein muß.

§. 15.

In dem einfacheren Falle, wo die Momente der an einem veränderlichen System thätigen äußern Kräfte Null sind in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen, läßt sich das Gesetz der drehenden Bewegung dieses Systems in Bezug auf das genannte Coordinatensystem wie bei einem einzigen materiellen Punkte in mehrfacher Weise aussprechen oder deuten.

Der genannte Fall tritt insbesondere ein, einmal wie beim materiellen Punkte (Buch I., §. 71), 1) wenn die Resultirende der an demselben Punkte angreifenden äußern Kräfte für alle Punkte des Systems Null ist, 2) wenn die Richtung dieser Resultirenden für alle Punkte des Systems fortwährend durch einen und denselben Punkt geht und dieser als Anfang des unbeweglichen Coordinatensystems genommen wird, und dann allgemeiner 3) **wenn alle an dem System thätigen äußern Kräfte immer eine einzige Resultirende haben und die Richtung dieser immer durch den Anfang der festen Coordinaten geht** (Buch II., §§. 83 und 87).

In allen diesen Fällen hat man in Bezug auf die festen Achsen

$$\Sigma.(xY-yX)=0\ ,\quad \Sigma.(zX-xZ)=0\ ,\quad \Sigma.(yZ-zY)=0$$

und die Gleichungen (10) werden dadurch einfach

$$\left\{\begin{aligned} &\Sigma.m\left(x\frac{d^2y}{dt^2}-y\frac{d^2x}{dt^2}\right)=0\ ,\\ &\Sigma.m\left(z\frac{d^2x}{dt^2}-x\frac{d^2z}{dt^2}\right)=0\ ,\\ &\Sigma.m\left(y\frac{d^2z}{dt^2}-z\frac{d^2y}{dt^2}\right)=0\ ;\end{aligned}\right.$$

es läßt sich nun jedes einzelne Summenglied für sich integriren und man findet so die Gleichungen:

$$19.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma.m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)=\Sigma.c_1\ ,\\ &\Sigma.m\left(z\frac{dx}{dt}-x\frac{dz}{dt}\right)=\Sigma.c_2\ ,\\ &\Sigma.m\left(y\frac{dz}{dt}-z\frac{dy}{dt}\right)=\Sigma.c_3\ ,\end{aligned}\right.$$

worin c_1 den anfänglichen Werth des Gliedes $m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$, c'_1 den des Gliedes $m'\left(x'\frac{dy'}{dt}-y'\frac{dx'}{dt}\right)$, u. s. f., $\Sigma.c_1$ also die Summe der anfänglichen Werthe aller in $\Sigma.m\left(x\frac{dy}{dt}-y\frac{dx}{dt}\right)$ enthaltenen Glieder bedeutet, und $\Sigma.c_2$ und $\Sigma.c_3$ die entsprechenden Bedeutungen für die Summenglieder der zweiten und dritten Gleichung besitzen. Die Bedeutung dieser Gleichungen selbst kann wieder wie bei dem materiellen Punkte (Buch I., §§. 72 u. 73) auf verschiedene Weise ausgesprochen werden.

Zuerst kann man dieselben wie am genannten Orte unter die Form bringen:

$$18.)\qquad \left\{\begin{aligned} &\Sigma.mr_1^2\frac{d\omega_1}{dt}=\Sigma.c_1\ ,\quad \Sigma.mr_2^2\frac{d\omega_2}{dt}=\Sigma.c_2\ ,\\ &\Sigma.mr_3^2\frac{d\omega_3}{dt}=\Sigma.c_3\ ,\end{aligned}\right.$$

indem man mit r_1, r_1', r_1'', etc. die Projectionen der von dem festen Anfangspunkte zu den einzelnen Punkten des Systems gezogenen Fahrstrahlen auf die Ebene der xy, und mit ω_1, ω_1', ω_1'', etc. die Winkel bezeichnet, welche diese projicirten Fahrstrahlen mit der Achse der x einschließen; ebenso mit r_2, r_2', r_2'', etc. die Projectionen derselben Fahrstrahlen auf die Ebene der xz und mit ω_2, ω_2', ω_2'', etc. die Winkel zwischen diesen Projectionen und der Achse der z, endlich mit r_3, r_3', r_3'', etc. die Projectionen jener Fahrstrahlen auf die Ebene der yz und mit ω_3, ω_3', ω_3'', etc. die Winkel der letztern Projectionen mit der Achse der y. Dabei ist noch zu beachten, daß die genannten Winkel ebenso wie ihre Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit: $\frac{d\omega_1}{dt}$, u. s. f. positiv zu nehmen sind, wenn die Bewegung der Projection des entsprechenden materiellen Punktes in der betreffenden Coordinaten-Ebene von der darauf stehenden positiven Achse aus angesehen im Sinne eines Uhrzeigers vor sich geht, im entgegengesetzten Falle werden sie negativ.

Betrachtet man dann den Ausdruck $r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt}$ als Aenderungsgesetz der doppelten Oberfläche O_1 des von dem projicirten Fahrstrahl r_1 in der Ebene der xy beschriebenen Sectors in Bezug auf die Zeit, so daß man hat

$$r_1^2 \frac{d\omega_1}{dt} = 2 \frac{dO_1}{dt},$$

ebenso für die übrigen Projectionen

$$r_2^2 \frac{d\omega_2}{dt} = 2 \frac{dO_2}{dt}, \qquad r_3^2 \frac{d\omega_3}{dt} = 2 \frac{dO_3}{dt},$$

und dehnt diese Betrachtung und Bezeichnung auf alle Punkte des Systems aus, so ergeben sich die Gleichungen:

$$\Sigma . m \frac{dO_1}{dt} = \tfrac{1}{2} C_1, \quad \Sigma . m \frac{dO_2}{dt} = \tfrac{1}{2} C_2, \quad \Sigma . m \frac{dO_3}{dt} = \tfrac{1}{2} C_3,$$

worin die Summen $\Sigma . c_1$, $\Sigma . c_2$, $\Sigma . c_3$ einfach durch C_1, C_2, C_3 ersetzt sind, und aus welchen man durch Integration in Bezug auf t die neuen Gleichungen:

$$\Delta . \Sigma . mO_1 = \tfrac{1}{2} C_1 t, \quad \Delta . \Sigma . mO_2 = \tfrac{1}{2} C_2 t, \quad \Delta . \Sigma . mO_3 = \tfrac{1}{2} C_3 t, \quad (19.$$

und den Schluß zieht:

Unter den im Eingang dieses Paragraphen ausgesprochenen Voraussetzungen wird die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems eine solche, daß die Aenderung der Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Punkte desselben in die von den Projectionen ihrer Fahrstrahlen in jeder der drei Coordinaten-Ebenen beschriebenen Sectorflächen der Zeit proportional sind; wobei aber zu beachten ist, daß diese Sectorflächen alle von demselben Zeitpunkte an zu rechnen und als positive oder negative Größen zu betrachten sind, deren Zeichen sich nach dem des entsprechenden Winkels ω richtet. Die Constanten C_1, C_2, C_3 bezeichnen dann offenbar die Summen der genannten Producte für die doppelte Zeiteinheit.

Man wird daraus leicht weiter schließen, daß weil diese Eigenschaft der Bewegung für drei unter sich rechtwinkliche Ebenen statt hat, sie überhaupt für jede andere Ebene besteht, daß man also auch sagen kann:

Unter jenen Voraussetzungen ändert sich die Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Punkte eines veränderlichen Systems in die von den Projectionen ihrer Fahrstrahlen in irgend einer Ebene beschriebenen Sectorflächen der Zeit proportional.

Diese Eigenschaft der drehenden Bewegung besteht aber nicht nur in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen, sondern wie man sich leicht durch die Gleichungen (14) überzeugen wird, auch für ein bewegliches Coordinatensystem, dessen Achsen sich immer parallel bleiben, und dessen Anfangspunkt entweder eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt oder mit dem Mittelpunkte der Masse des Systems zusammenfällt, immer unter denselben Voraussetzungen wie oben, daß entweder die äußern Kräfte an jedem einzelnen Punkte im Gleichgewichte sind, in welchem Falle der Mittelpunkt der Masse selbst eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt, oder daß die Richtung der Resultirenden aller äußern Kräfte des Systems beständig durch den beweglichen Anfangspunkt geht. Denn man hat in diesen beiden Fällen, von denen der letztere wieder als besondern Fall den einschließt, wo alle Kräfte gegen den beweglichen Anfangspunkt gerichtet sind, in den Gleichungen (14)

$$\Sigma . M_{Z,} = \Sigma . (x, Y - y, X) = 0 , \quad \Sigma . M_{Y,} = \Sigma . (z, X - x, Z) = 0 ,$$

$$\Sigma . M_{X,} = \Sigma . (y, Z - z, Y) = 0$$

und zieht damit aus diesen Gleichungen ganz dieselben Folgerungen, wie sie vorher aus den Gleichungen (10) in Bezug auf feste Coordinaten-Achsen gezogen wurden.

Die vorhergehende Bedingung, daß die Resultirende aller äußern Kräfte des Systems immer durch den beweglichen Coordinaten-Anfang gehen muß, wird in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse offenbar insbesondere dann befriedigt werden, wenn jene Kräfte fortwährend unter sich parallel bleiben und den Massen ihrer Angriffspunkte proportional sind. Die oben erklärte Eigenschaft der drehenden Bewegung wird daher in Bezug auf jedes sich frei bewegende schwere System von nicht zu großer Ausdehnung an der Oberfläche der Erde statt haben, wenn dasselbe in Bezug auf seine drehende Bewegung blos der Wirkung der Schwere unterworfen vorausgesetzt, wenn also dafür von dem Luftwiderstand Umgang genommen wird.

§. 16.

Der vorhergehende Satz, welcher wie bei dem materiellen Punkte den Namen: Princip von der Einhaltung der Oberflächen führt, hat durch nachfolgende Betrachtung eine besondere Wichtigkeit für die Theorie des Weltgebäudes und die Astronomie erlangt.

Unter den unendlich vielen Ebenen, auf welche man die Bewegungen aller einzelnen Punkte des Systems projiciren kann, muß es eine geben, für welche die Summe der Producte aus den Massen jener Punkte in die von ihren projicirten Fahrstrahlen während einer bestimmten Zeit, z. B. in der doppelten Zeiteinheit beschriebenen Sectorflächen einen größten Werth hat. Bezeichnen wir diese Summe mit C, und die Winkel, welche die Normale der zu bestimmenden Ebene mit den drei festen Achsen der x, y, z einschließt, mit λ, μ, ν, so hat man einmal die Bedingung:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

und dann die Beziehung:

$$C = C_1 \cos\lambda + C_2 \cos\mu + C_3 \cos\nu,$$

worin zwei Winkel, z. B. λ und μ als unabhängige Veränderliche zu betrachten sind, während der dritte gemäß der vorhergehenden Bedingungsgleichung als Function dieser beiden auftritt. Man zieht daraus die Aenderungsgesetze:

$$\begin{cases} \cos\lambda \sin\lambda + \cos\nu \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\lambda} = 0 \,, \\ \cos\mu \sin\mu + \cos\nu \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\mu} = 0 \,, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{dC}{d\lambda} = - C_1 \sin\lambda - C_3 \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\lambda} = \dfrac{\sin\lambda}{\cos\nu} (C_3 \cos\lambda - C_1 \cos\nu) \\ \dfrac{dC}{d\mu} = - C_2 \sin\mu - C_3 \sin\nu \dfrac{d\nu}{d\mu} = \dfrac{\sin\mu}{\cos\nu} (C_3 \cos\mu - C_2 \cos\nu) \end{cases}$$

und die beiden letztern geben für einen größten Werth von C die beiden Bedingungen:

$$C_3 \cos\lambda - C_1 \cos\nu = 0 \quad , \qquad C_3 \cos\mu - C_2 \cos\nu = 0 \,.$$

Damit findet man leicht für die Winkel λ, μ, ν die Functionen:

$$20.)\ \begin{cases} \cos\lambda = \dfrac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} \,, \quad \cos\mu = \dfrac{C_2}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} \,, \\ \cos\nu = \dfrac{C_3}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}} \,, \end{cases}$$

aus welchen hervorgeht, daß die Lage dieser Ebene eine unveränderliche ist, da sie nur von den constanten Größen C_1, C_2, C_3 abhängt, daß sie daher, einmal während der Bewegung des Systems bestimmt, für die ganze Dauer derselben bekannt sein wird.

Wenn demnach eine solche Ebene für ein veränderliches System vorhanden ist, so wird es das Einfachste sein, diese Ebene selbst als eine der Coordinaten-Ebenen, z. B. als die der xy zu nehmen, wobei eine der beiden andern noch eine beliebige Lage um die Achse der z erhalten kann. Man hat dann aber in Bezug auf das neue Coordinatensystem

$$\lambda = \mu = \tfrac{1}{2}\pi \quad , \qquad \cos\lambda = \cos\mu = 0 \,,$$

mithin auch

$$C_1 = 0 \quad , \qquad C_2 = 0 \,,$$

und schließt daraus, daß für jede Ebene, welche zu der Ebene der größten Flächensumme, wie wir sie kurz bezeichnen wollen, senkrecht ist, die Summe der Producte aus den Massen der einzelnen Punkte in die von den projicirten Fahrstrahlen beschriebenen Sectorflächen Null wird.

Laplace, welcher zuerst diese Eigenschaften der betreffenden Ebene entdeckte, hat ihr den Namen: unveränderliche Ebene (plan invariable) gegeben, und darauf in Bezug auf die Theorie der Bewegungen unsers Planetensystems die Hoffnung gegründet, daß es mittels dieser Ebene möglich sein werde, die Beobachtungen vergangener und künftiger Jahrhunderte genau mit einander zu vergleichen, indem man dieselben auf ein Coordinatensystem beziehe, dessen eine Ebene mit jener unveränderlichen Ebene zusammenfalle. Untersuchen wir also, in wiefern die Voraussetzungen, auf welchen das Dasein einer unveränderlichen Ebene beruht, in unserem Planetensystem gegeben sind, indem wir davon Umgang nehmen, daß die jeweilige Bestimmung ihrer Lage immer nur eine angenäherte sein kann, weil zu einer genauen Bestimmung in irgend einem Augenblicke alle Massen des Systems, deren Entfernungen von einem festen oder von einem gleichförmig-geradlinig sich fortbewegenden Punkte und deren Geschwindigkeiten parallel zu festen oder mit diesem Punkte parallel sich fortbewegenden Coordinaten-Achsen genau bekannt sein müßten.

Als erste Annäherung und daher für nicht große Zeiträume kann man zugeben, daß der Mittelpunkt der Masse unseres Planetensystems eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitze, und demgemäß in Bezug auf diesen Punkt die Producte aus den Massen der Planeten in die von ihren projicirten Fahrstrahlen beschriebenen Sectorflächen berechnen, um die Lage der Ebene der größten Flächensumme zu bestimmen. Es wird auch vor der Hand diese Art der Bestimmung die einzig mögliche bleiben, weil uns außerhalb unseres Planetensystems kein Punkt gegeben ist, welchen wir mit größerem Rechte als Anfang eines festen oder beweglichen Coordinatensystems annehmen könnten, um darauf die äußere Bewegung unseres Planetensystems zu beziehen. Es ist aber durchaus nicht nothwendig, dieser Bestimmung der unveränderlichen Ebene die sehr wenig Wahrscheinlichkeit für sich habende Annahme einer gleichförmigen-geradlinigen Bewegung für den Mittelpunkt der Masse unseres Planetensystems zu Grunde zu legen; wir können uns dazu mit viel größerer Annäherung und für viel größere Zeiträume geltend auf die bei weitem wahrscheinlichere Voraussetzung stützen, daß sich jener Mittelpunkt unseres Planetensystems in ähnlicher Weise um eine Central-Sonne bewegt, wie der Massemittelpunkt von Erde und Mond oder der des Systems, welches Jupiter mit seinen vier Trabanten bildet, um unsere Sonne, indem zwischen jener Central-Sonne und den einzelnen Körpern unseres Planetensystems das allgemeine Gesetz der Massen-Anziehung besteht.

Wenn diese Voraussetzung gegründet ist, so müßten wir streng-

genommen den Mittelpunkt jener Central-Sonne als Anfang eines festen oder, mit hinreichender Wahrscheinlichkeit und Annäherung, eines parallel und geradlinig-gleichförmig fortschreitenden Coordinatensystems annehmen, das Princip der Flächen würde auch noch unter diesen Bedingungen seine volle Gültigkeit haben und es folglich auch hier eine der Lage nach unveränderliche Ebene geben, da wir nun ein System haben, worin die äußern Kräfte alle gegen einen festen Punkt oder doch gegen einen gleichförmig-geradlinig sich fortbewegenden Coordinaten-Anfang gerichtet sind. Die bis jetzt noch unbekannte Lage und Entfernung jener Central-Sonne macht es uns indessen unmöglich, die Lage der unveränderlichen Ebene in Bezug auf sie als Coordinaten-Anfang zu berechnen, und zwingt uns, bei der zuerst angegebenen Art der Bestimmung jener Ebene zu bleiben, welche sich dann auch unter der jetzigen Voraussetzung mit sehr großer Annäherung rechtfertigen läßt, wenn man beachtet, daß die Entfernung jener Central-Sonne jedenfalls sehr groß ist gegen die Ausdehnung unseres Planetensystems, daß also der Mittelpunkt der Anziehung für jede Gestaltung des Systems sehr nahe mit dem Mittelpunkte seiner Masse zusammenfällt (Buch II., §§. 97 u. 108). Dieser Punkt kann demnach mit sehr großer Annäherung jederzeit als Angriffspunkt der Resultirenden und folglich auch als Anfang eines parallel sich bewegenden Coordinatensystems genommen werden, um das Princip der Einhaltung der Flächen zur Bestimmung der Ebene der größten Flächensumme anzuwenden. Ja es wird diese Bestimmung auch dann noch gültig bleiben, wenn auf unser Planeten-System nicht blos die anziehende Kraft der Central-Sonne wirkt, sondern auch die beliebig vieler andern Sonnen, obgleich durch diese die rein elliptische Bewegung des Mittelpunktes unseres Systems um jene Central-Sonne wesentlich beeinträchtigt werden mag, weil wegen der sehr großen Entfernung aller dieser Weltkörper die Mittelpunkte der von ihnen ausgehenden anziehenden Wirkungen immer sehr nahe mit dem Mittelpunkte der Masse unseres Planetensystems zusammenfallen und dieser daher immer sehr nahe der gemeinschaftliche Angriffspunkt aller dieser Kräfte, folglich auch der ihrer Resultirenden bleibt.

§. 17.

Den Gleichungen (17), welche die Gesetze der drehenden Bewegung für den Fall ausdrücken, wo das System eine allgemeine Resultirende hat, welche entweder Null ist, oder deren Richtung durch den Anfangspunkt der festen Coordinaten geht, läßt sich nun auch noch eine andere

als die geometrische Bedeutung, welche zu dem Princip von der Einhaltung der Flächen führte, unterlegen.

Bezeichnen wir nämlich mit P eine Kraft, welche die augenblickliche Bewegungsgröße m v des materiellen Punktes, dessen Masse = m, und dessen Geschwindigkeit und Coordinaten am Ende der Zeit t durch v, x, y, z vorgestellt sind, in der Einheit der Zeit zu erzeugen vermöchte (Buch I., §. 41) und welche dieselbe Richtung hat, wie die Geschwindigkeit dieses Punktes, so werden

$$m\frac{dx}{dt} = mu_x \quad , \quad m\frac{dy}{dt} = mu_y \quad , \quad m\frac{dz}{dt} = mu_z$$

die den festen Achsen parallelen Componenten dieser Kraft sein, und die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} m\left(x\frac{dy}{dt} - y\frac{dx}{dt}\right) &= mu_y x - mu_x y \\ m\left(z\frac{dx}{dt} - x\frac{dz}{dt}\right) &= mu_x z - mu_z x \\ m\left(y\frac{dz}{dt} - z\frac{dy}{dt}\right) &= mu_z y - mu_y z \end{aligned}\right\}$$

werden die drehenden Wirkungen dieser Kraft in Bezug auf dieselben Coordinaten-Achsen oder die zu diesen Achsen parallelen Componenten der Achse ihres Momentes M_{mv} in Bezug auf den festen Coordinaten-Anfang vorstellen. Mit dieser Unterlegung sprechen demnach die Gleichungen (17) aus, daß unter den obengenannten Bedingungen die Summe oder die Resultirende der drehenden Wirkungen aller Bewegungsgrößen in Bezug auf jede der drei Coordinaten-Achsen für die ganze Dauer der Bewegung unveränderlich ist, und durch die constanten Größen C_1, C_2, C_3 vorgestellt wird.

Diese Resultirenden C_1, C_2, C_3 sind aber selbst wieder die Componenten des resultirenden Momentes $\Sigma . M_{mv}$ aller Bewegungsgrößen, folglich dieses selbst unveränderlich, da man hat

$$\Sigma . M_{mv} = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2} \; ,$$

ebenso wie die Lage seiner Achse, deren Winkel λ, μ, ν mit den drei Coordinaten-Achsen durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{C_1}{\Sigma.M_{mv}} = \frac{C_1}{\sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}}$$

$$\cos\mu = \frac{C_2}{\Sigma.M_{mv}}\ , \qquad \cos\nu = \frac{C_3}{\Sigma.M_{mv}}$$

bestimmt werden. Man schließt daraus, daß die Achse des resultirenden Momentes $\Sigma.M_{mv}$ aller Bewegungsgrößen mit der Normalen zur Ebene der größten Flächensumme zusammenfällt, oder daß diese Ebene die Ebene des resultirenden Momentes $\Sigma.M_{mv}$ ist.

Das eben ausgesprochene Gesetz der drehenden Bewegung, welches wir im vorhergehenden Buche schon auf anderem Wege für ein um einen festen Punkt sich drehendes festes System gefunden haben (Buch II., §. 191) gilt übrigens, wie man leicht aus den Gleichungen (14) und den ihnen zu Grunde liegenden Bedingungen schließen wird, auch in Bezug auf ein bewegliches Coordinatensystem, dessen Achsen sich immer parallel bleiben, und dessen Anfangspunkt entweder eine gleichförmige geradlinige Bewegung hat, oder der Mittelpunkt der Masse des Systems ist, immer unter der Voraussetzung, daß das System eine allgemeine Resultirende hat, deren Richtung durch den Anfangspunkt der beweglichen Coordinaten-Achsen geht. Jenes Gesetz wird also insbesondere wieder für jedes schwere System gültig sein, das an der Oberfläche der Erde eine freie Bewegung besitzt, in Bezug auf ein parallel bleibendes Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Schwerpunkt des bewegten Systems ist.

§. 18.

Wenn die vorher genannte Bedingung, daß die Richtung der Resultirenden aller äußern Kräfte des Systems beständig durch den Coordinaten-Anfang geht, zugleich und fortwährend für einen festen außerhalb des Systems liegenden Punkt, und in Bezug auf einen beweglichen Coordinaten-Anfang befriedigt wird, so hat man in der Ebene der xy die Bedingungen:

$$\Sigma.(xY - yX) = 0\ , \qquad \Sigma.(x_1 Y - y_1 X) = 0\ ,$$

und schließt daraus mit den Beziehungen:

$$x = \mathfrak{x} + x_1\ , \qquad y = \mathfrak{y} + y_1$$

die weitere Bedingung:

a.) $$\mathfrak{x}\,\Sigma.Y - \mathfrak{y}\,\Sigma.X = 0\ ;$$

für die beiden andern Coordinaten-Ebenen ergeben sich ebenso die entsprechenden Bedingungen:

$$\mathfrak{z}\,\Sigma.X - \mathfrak{x}\,\Sigma.Z = 0 \quad , \qquad \mathfrak{y}\,\Sigma.Z - \mathfrak{z}\,\Sigma.Y = 0 \,. \qquad \text{(b.}$$

Ist nun der bewegliche Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des bewegten Systems, so zieht man aus den Gleichungen (12^a) in §. 12, wie es für einen materiellen Punkt in Buch I., §. 71 geschehen ist, die neuen Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\mathfrak{X}\,\dfrac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} - \mathfrak{Y}\,\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}\right) = \mathfrak{X}\,\Sigma.Y - \mathfrak{Y}\,\Sigma.X \\ M\left(\mathfrak{Z}\,\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} - \mathfrak{X}\,\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right) = \mathfrak{Z}\,\Sigma.X - \mathfrak{X}\,\Sigma.Z \\ M\left(\mathfrak{Y}\,\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} - \mathfrak{Z}\,\dfrac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}\right) = \mathfrak{Y}\,\Sigma.Z - \mathfrak{Z}\,\Sigma.Y \end{array}\right\} , \qquad \text{(c.}$$

deren rechte Seiten unter der vorhergehenden Voraussetzung zufolge der daraus abgeleiteten Bedingungen (a) und (b), worin nun $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ übergehen, Null werden, und aus denen sich daher wie an dem genannten Orte durch die erste Integration die Gesetze ergeben:

$$\left.\begin{array}{l} M\left(\mathfrak{X}\,\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt} - \mathfrak{Y}\,\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt}\right) = K_1 \\ M\left(\mathfrak{Z}\,\dfrac{d\mathfrak{X}}{dt} - \mathfrak{X}\,\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt}\right) = K_2 \\ M\left(\mathfrak{Y}\,\dfrac{d\mathfrak{Z}}{dt} - \mathfrak{Z}\,\dfrac{d\mathfrak{Y}}{dt}\right) = K_3 \end{array}\right\} , \qquad \text{(21.}$$

und diese führen endlich wieder dadurch, daß man sie der Reihe nach mit $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{X}$ multiplizirt und die Producte summirt, auf die Gleichung

$$K_1\,\mathfrak{Z} + K_2\,\mathfrak{Y} + K_3\,\mathfrak{X} = 0 \,. \qquad \text{(22.}$$

Aus diesen Ergebnissen schließt man wie in dem genannten Paragraphen des ersten Buches, daß wenn es für ein veränderliches System von materiellen Punkten eine allgemeine Resultirende aller äußern Kräfte gibt, und deren Richtung immer zugleich durch einen festen Coordinaten-Anfang und durch den Mittelpunkt der Masse des Systems geht, dieser letztere sich in einer durch den Anfangspunkt der festen Coordinaten gehenden Ebene bewegt, und daß für ihn selbst das Princip von der Einhaltung der Flächen oder eines der in §. 73 des I. Buches ausgesprochenen mechanischen Gesetze gilt.

Umgekehrt wird man auch folgern, daß diese Gesetze für die Bewegung des Mittelpunktes der Masse eines Systems nicht mehr gültig sein können, wenn er nicht beständig Angriffspunkt der allgemeinen Resultirenden aller äußern Kräfte des Systems bleibt und die Richtung dieser letztern nicht beständig durch einen festen Punkt geht, oder doch durch einen gleichförmig-geradlinig fortschreitenden, welcher außerhalb oder innerhalb des Systems liegen kann.

Man wird sich nämlich in Betreff dieser letztern Behauptung leicht überzeugen, daß man in den Gleichungen (14), welche sich auch auf einen gleichförmig-geradlinig fortschreitenden Coordinaten-Anfang beziehen, die Coordinaten x_1, y_1, z_1 wieder durch andere ersetzen kann, welche die Lage der Punkte des Systems in Bezug auf ein paralleles Coordinatensystem der x_2, y_2, z_2 ausdrücken, dessen Anfang der Mittelpunkt der Masse ist und in Bezug auf die Achsen der x_1, y_1, z_1 durch die Coordinaten X_1, Y_1, Z_1 bestimmt wird; man wird demnach in den Gleichungen (14)

$$X_1 + x_2 \text{ für } x_1 \quad , \quad Y_1 + y_2 \text{ für } y_1 \quad , \quad Z_1 + z_2 \text{ für } z_1$$

einführen und so aus ihnen mit den Bedingungen:

$$\text{d.)} \quad \Sigma . m x_2 = 0 \; , \quad \Sigma . m y_2 = 0 \quad , \quad \Sigma . m z_2 = 0 \; ,$$

welche aussprechen, daß der Mittelpunkt der Masse der Anfangspunkt der x_2, y_2, z_2 sein soll, und mit der Beachtung, daß die Gleichungen (11) nach unserer Voraussetzung:

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0 \quad , \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$$

zuerst auf

$$\left\{ \begin{array}{l} \Sigma . m \dfrac{d^2 x_1}{dt^2} = \Sigma . X \quad , \quad \Sigma . m \dfrac{d^2 y_1}{dt^2} = \Sigma . Y \\ \qquad \Sigma . m \dfrac{d^2 z_1}{dt^2} = \Sigma . Z \end{array} \right.$$

zurückkommen und dann durch die obigen Werthe für x_1, y_1, z_1 und die Bedingungen (d) in die den Gleichungen (12) ähnlichen

$$\text{23.)} \quad M \frac{d^2 X_1}{dt^2} = \Sigma . X \quad , \quad M \frac{d^2 Y_1}{dt^2} = \Sigma . Y \quad , \quad M \frac{d^2 Z_1}{dt^2} = \Sigma . Z$$

übergehen, wieder die den Gleichungen (14) ganz ähnliche Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.m\left(x_2\frac{d^2y_2}{dt^2}-y_2\frac{d^2x_2}{dt^2}\right)&=\Sigma(x_2Y-y_2X)\\ \Sigma.m\left(z_2\frac{d^2x_2}{dt^2}-x_2\frac{d^2z_2}{dt^2}\right)&=\Sigma(z_2X-x_2Z)\\ \Sigma.m\left(y_2\frac{d^2z_2}{dt^2}-z_2\frac{d^2y_2}{dt^2}\right)&=\Sigma(y_2Z-z_2Y)\end{aligned}\right\}\quad(24.$$

ableiten, und daraus allgemein schließen, daß alle Gesetze für die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems ebensowohl für parallel bleibende Coordinaten-Achsen, deren Durchschnittspunkt eine gleichförmige geradlinige Bewegung hat, wie für feste Coordinaten-Achsen gültig sind, natürlich unter sonst gleichen Voraussetzungen für beide Coordinatensysteme.

In Bezug auf unser Planetensystem ergibt sich aus der vorhergehenden Erörterung der Schluß, daß wenn man selbst die gegenseitige anziehende Wirkung der Planeten unter sich vernachläßigen wollte, der Massemittelpunkt von Erde und Mond oder der eines andern aus einem Hauptplaneten und seinen Trabanten gebildeten Systems doch noch keine reine elliptische Bewegung um die Sonne erhalten würde, weil der Mittelpunkt der Anziehung nicht genau mit dem Mittelpunkte der Masse zusammenfällt. Ja es würde strenggenommen jene Bewegung nicht einmal für die Erde allein statthaben, weil der Mittelpunkt der von der Sonne ausgehenden Anziehung wegen der elliptischen Gestalt der Erde und der Neigung ihrer Achse nicht immer auf der Geraden liegt, welche den Mittelpunkt der Sonne und den Mittelpunkt der Erdmasse verbindet. Es dürfte indessen wegen der geringen Größe der Erde im Vergleich zu der Entfernung der Sonne, welche 24000 Erdhalbmesser beträgt, kaum möglich erscheinen, die von dem erwähnten Umstande herrührende Abweichung von der rein elliptischen Bewegung durch die Beobachtung nachzuweisen. Es ist selbst bei dieser großen Entfernung der Sonne der Mittelpunkt der von ihr auf die Erde und ihren Mond ausgeübten Anziehung so wenig von dem Mittelpunkte der Masse dieser beiden Körper entfernt, daß ohne die anziehende Wirkung der übrigen Planeten zwischen der Bewegung dieses Mittelpunktes und einer rein-elliptischen Bewegung durch die Beobachtung kaum ein Unterschied gefunden werde dürfte.

§. 19.

Die Gesetze für die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems, welche wir in dem Vorhergehenden abgeleitet haben, finden sich vereinigt

in dem Gesetze von der Aenderung der äußern lebendigen Kraft des Systems durch die äußere Arbeit der äußern Kräfte, welches sich in ähnlicher Weise ableiten läßt, wie es im vorhergehenden Buche (§. 205, u. s. f.) für ein festes System bewiesen wurde, und wie es im Folgenden geschehen soll, mehr wegen der vollständigen Durchführung der allgemeinen Gesetze für die äußere Bewegung eines veränderlichen Systems und deßhalb, weil jenes Gesetz den entsprechenden Lehrsatz für feste Systeme als besondern Fall enthält, als weil derselbe für die Untersuchung gegebener Fälle dienlicher sein könnte, als die Gleichungen (12) und (14) oder (18).

Behalten wir dazu die bisherigen Bezeichnungen bei, insbesondere die in §§. 12 bis 14 angewendeten, so haben wir einmal zwischen den Coordinaten x, y, z eines der materiellen Punkte des Systems in Bezug auf feste rechtwinkliche Coordinaten=Achsen, den Coordinaten $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ desselben Punktes in Bezug auf ein fortschreitendes Coordinatensystem, dessen Achsen den vorigen immer parallel bleiben, und den Coordinaten $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ des Anfangspunktes der letztern die Beziehungen:

$$\text{a.)} \quad x = \mathfrak{x} + x_{,} \quad , \quad y = \mathfrak{y} + y_{,} \quad , \quad z = \mathfrak{z} + z_{,} \, ;$$

ferner ergeben sich zwischen den Coordinaten x, y, z und den Coordinaten ξ, η, ζ desselben Punktes in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem, dessen Achsen am Ende der Zeit t die Winkel $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, $\widehat{\eta y}$, u. s. f. mit den Achsen der x, y, z einschließen die Gleichungen:

$$\text{b.)} \quad \begin{cases} \xi = a x_{,} + b y_{,} + c z_{,} \, , \\ \eta = a' x_{,} + b' y_{,} + c' z_{,} \, , \\ \zeta = a'' x_{,} + b'' y_{,} + c'' z_{,} \, , \end{cases}$$

worin a, b, c, a', b', c' u. s. f. die Cosinus der ebengenannten Winkel der Reihe nach bezeichnen.

Sei dann v die Geschwindigkeit des entsprechenden materiellen Punktes in Bezug auf das unbewegliche Coordinatensystem, u_x, u_y, u_z ihre Componenten nach den festen oder den parallel bleibenden beweglichen Achsen, u_ξ, u_η, u_ζ ihre Componenten nach den sich drehenden Achsen, und verstehen wir wieder unter der äußern Geschwindigkeit desselben Punktes die Geschwindigkeit $\widehat{v}$, deren Componenten nach den drei festen Achsen durch die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{u_x} &= u_x - \left(a\frac{d\xi}{dt} + a'\frac{d\eta}{dt} + a''\frac{d\zeta}{dt}\right)\\ \widehat{u_y} &= u_y - \left(b\frac{d\xi}{dt} + b'\frac{d\eta}{dt} + b''\frac{d\zeta}{dt}\right)\\ \widehat{u_z} &= u_z - \left(c\frac{d\xi}{dt} + c'\frac{d\eta}{dt} + c''\frac{d\zeta}{dt}\right)\end{aligned}\right\} \quad (10.)$$

gegeben sind, während ihre zu den beweglichen Achsen parallelen Componenten $\widehat{u_\xi}$, $\widehat{u_\eta}$, $\widehat{u_\zeta}$ durch die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}\widehat{u_\xi} &= a\widehat{u_x} + b\widehat{u_y} + c\widehat{u_z} = u_\xi - \frac{d\xi}{dt}\\ \widehat{u_\eta} &= a'\widehat{u_x} + b'\widehat{u_y} + c'\widehat{u_z} = u_\eta - \frac{d\eta}{dt}\\ \widehat{u_\zeta} &= a''\widehat{u_x} + b''\widehat{u_y} + c''\widehat{u_z} = u_\zeta - \frac{d\zeta}{dt}\end{aligned}\right\} \quad (11.)$$

ausgedrückt werden, also diejenige Geschwindigkeit, welche der betreffende materielle Punkt besitzen würde, wenn er am Ende der Zeit t mit den sich drehenden Coordinaten-Achsen fest verbunden wäre. Endlich seien $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$, $\widehat{s}$ solche Functionen von t, daß man für diesen Zeitpunkt die Beziehungen hat:

$$\widehat{u_x} = \frac{d\widehat{x}}{dt}, \quad \widehat{u_y} = \frac{d\widehat{y}}{dt}, \quad \widehat{u_z} = \frac{d\widehat{z}}{dt},$$

$$\widehat{v} = \sqrt{\widehat{u_x}^2 + \widehat{u_y}^2 + \widehat{u_z}^2} = \frac{d\widehat{s}}{dt};$$

es werden dann die Verhältnisse

$$\frac{\widehat{u_x}}{\widehat{v}} = \frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}, \quad \frac{\widehat{u_y}}{\widehat{v}} = \frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}}, \quad \frac{\widehat{u_z}}{\widehat{v}} = \frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}$$

die Cosinus der Winkel sein, welche die Richtung der äußern Bewegung des betreffenden Punktes in demselben Augenblicke mit den festen Achsen bildet, und folglich der Ausdruck:

$$X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}$$

das Aenderungsgesetz der äußern Arbeit der an unserm Punkte thätigen äußern Kraft P vorstellen.

Nehmen wir nun von den Gleichungen (a) und (b) die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Veränderliche t, wodurch sich die Gleichungen:

$$\text{e.)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt} + \frac{dx_{,}}{dt}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} + \frac{dy_{,}}{dt}, \\ \frac{dz}{dt} = \frac{dz}{dt} + \frac{dz_{,}}{dt}, \end{array} \right.$$

und

$$\text{f.)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d\xi}{dt} = a\frac{dx_{,}}{dt} + b\frac{dy_{,}}{dt} + c\frac{dz_{,}}{dt} + x_{,}\frac{da}{dt} + y_{,}\frac{db}{dt} + z_{,}\frac{dc}{dt} \\ \frac{d\eta}{dt} = a'\frac{dx_{,}}{dt} + b'\frac{dy_{,}}{dt} + c'\frac{dz_{,}}{dt} + x_{,}\frac{da'}{dt} + y_{,}\frac{db'}{dt} + z_{,}\frac{dc'}{dt} \\ \frac{d\zeta}{dt} = a''\frac{dx_{,}}{dt} + b''\frac{dy_{,}}{dt} + c''\frac{dz_{,}}{dt} + x_{,}\frac{da''}{dt} + y_{,}\frac{db''}{dt} + z_{,}\frac{dc''}{dt} \end{array} \right.$$

ergeben, und führen diese Werthe von $\frac{d\xi}{dt}, \frac{d\eta}{dt}, \frac{d\zeta}{dt}$ in die Gleichungen (c) ein, so finden wir mit Beachtung der bekannten Bedingungsgleichungen zwischen den Cosinus a, b, c, u. s. f., und ihren Aenderungsgesetzen in Bezug auf t die neuen Gleichungen:

$$\text{g.)}\quad \left\{ \begin{array}{l} \widehat{u_x} = u_x - \frac{dx_{,}}{dt} + ry_{,} - qz_{,} \\ \widehat{u_y} = u_y - \frac{dy_{,}}{dt} + pz_{,} - rx_{,} \\ \widehat{u_z} = u_z - \frac{dz_{,}}{dt} + qx_{,} - py_{,} \end{array} \right.$$

worin die Coeffizienten p, q, r der Reihe nach die Ausdrücke:

$$\left\{ \begin{array}{l} c\frac{db}{dt} + c'\frac{db'}{dt} + c''\frac{db''}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cos\lambda \\ a\frac{dc}{dt} + a'\frac{dc'}{dt} + a''\frac{dc''}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cos\mu \\ b\frac{da}{dt} + b'\frac{da'}{dt} + b''\frac{da''}{dt} = \frac{d\omega}{dt}\cos\nu \end{array} \right.$$

ersehen und die angedeuteten Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\omega}{dt}$ in Bezug auf die Achsen der $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ vorstellen. Ersetzen wir endlich noch die Werthe von u_x, u_y, u_z durch ihre Werthe aus den Gleichungen (e), die $x_{,}$, $y_{,}$, $z_{,}$ durch ihre Werthe aus den Gleichungen (a) und dividiren die Gleichungen (g) durch $\widehat{v}$, so erhalten wir für die Cosinus $\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}}$, $\frac{d\hat{s}}{d\hat{y}}$, $\frac{d\hat{z}}{d\hat{s}}$ folgende Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} &= \frac{dx}{d\hat{s}} - \frac{d\omega}{d\hat{s}}(y\cos\nu - z\cos\mu) + \frac{d\omega}{d\hat{s}}(y\cos\nu - z\cos\mu) \\
\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} &= \frac{dy}{d\hat{s}} - \frac{d\omega}{d\hat{s}}(z\cos\lambda - x\cos\nu) + \frac{d\omega}{d\hat{s}}(z\cos\lambda - x\cos\nu) \\
\frac{d\hat{z}}{d\hat{s}} &= \frac{dz}{d\hat{s}} - \frac{d\omega}{d\hat{s}}(x\cos\mu - y\cos\lambda) + \frac{d\omega}{d\hat{s}}(x\cos\mu - y\cos\lambda)
\end{aligned}\right\},$$

und der Ausdruck $\Sigma.\left(X\frac{d\hat{x}}{d\hat{s}} + Y\frac{d\hat{y}}{d\hat{s}} + Z\frac{d\hat{z}}{d\hat{s}}\right)$ für die äußere Arbeit sämmtlicher äußern Kräfte nimmt damit und mit Berücksichtigung derjenigen Factoren, wie $\frac{dx}{d\hat{s}}$, $\frac{d\omega}{d\hat{s}}$, $\cos\lambda$, u. s. f., welche alle Glieder dieser Summe gemeinschaftlich haben, die Form an:

$$\left[\frac{dx}{d\hat{s}} - \frac{d\omega}{d\hat{s}}(y\cos\nu - z\cos\mu)\right]\Sigma.X + \left[\frac{dy}{d\hat{s}} - \frac{d\omega}{d\hat{s}}(z\cos\lambda - x\cos\nu)\right]\Sigma.Y$$

$$+ \left[\frac{dz}{d\hat{s}} - \frac{d\omega}{d\hat{s}}(x\cos\mu - y\cos\lambda)\right]\Sigma.Z$$

$$+ \frac{d\omega}{d\hat{s}}\Big[\cos\nu\,\Sigma(Xy - Yx) + \cos\mu\,\Sigma(Zx - Xz) + \cos\lambda\,\Sigma(Yz - Zy)\Big].$$

Wir haben aber auch für ein veränderliches System gemäß der Gleichungen (9) und (10)

$$\Sigma.X = \Sigma.\mathfrak{X} \quad , \quad \Sigma.Y = \Sigma.\mathfrak{Y} \quad , \quad \Sigma.Z = \Sigma.\mathfrak{Z}$$

und

$$\Sigma(Xy - Yx) = \Sigma(\mathfrak{X}y - \mathfrak{Y}x)\,,\quad \Sigma(Zx - Xz) = \Sigma(\mathfrak{Z}x - \mathfrak{X}z)$$
$$\Sigma(Yz - Zy) = \Sigma(\mathfrak{Y}z - \mathfrak{Z}y)\,,$$

wenn $\mathfrak{X} = m\frac{d^2x}{dt^2} = m\frac{du_x}{dt}$, $\mathfrak{Y} = m\frac{d^2y}{dt^2} = m\frac{du_y}{dt}$, $\mathfrak{Z} = m\frac{d^2z}{dt^2} = m\frac{du_z}{dt}$ wieder die Componenten einer Kraft $\mathfrak{P}$ sind, welche dem materiellen Punkte xyz, wenn er frei wäre und unter denselben anfänglichen Umständen dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie jetzt in Verbindung mit dem System erhält, und schließen dadurch auf die Gleichung:

$$25.)\quad \Sigma\left(\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right) = \Sigma\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right),$$

welche ausspricht, daß das Aenderungsgesetz der äußeren Arbeit der Kräfte $\mathfrak{P}$ in jedem Augenblicke dem der äußern Arbeit aller äußern Kräfte P oder X, Y und Z gleich ist.

§. 20.

Um endlich von dieser Gleichung auf die Aenderung der äußern lebendigen Kraft des Systems zu schließen, ersetze ich die Kräfte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ durch diejenigen, welche die Aenderung der äußern Geschwindigkeiten u_x, u_y, u_z erzeugen; dazu geben uns die Gleichungen (c) die Beziehungen:

$$h.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{du_x}{dt} &= \frac{d\widehat{u}_x}{dt} + \left(a\frac{d^2\xi}{dt^2} + a'\frac{d^2\eta}{dt^2} + a''\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{da}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{da'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{da''}{dt}\right), \\
\frac{du_y}{dt} &= \frac{d\widehat{u}_y}{dt} + \left(b\frac{d^2\xi}{dt^2} + b'\frac{d^2\eta}{dt^2} + b''\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{db}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{db'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{db''}{dt}\right), \\
\frac{du_z}{dt} &= \frac{d\widehat{u}_z}{dt} + \left(c\frac{d^2\xi}{dt^2} + c'\frac{d^2\eta}{dt^2} + c''\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right) \\
&\quad + \left(\frac{d\xi}{dt}\frac{dc}{dt} + \frac{d\eta}{dt}\frac{dc'}{dt} + \frac{d\zeta}{dt}\frac{dc''}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

und wenn diese der Reihe nach mit

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} &= \frac{\widehat{u}_x}{\widehat{v}} = \frac{1}{\widehat{v}}\left(a\widehat{u}_\xi + a'\widehat{u}_\eta + a''\widehat{u}_\zeta\right)\\
\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} &= \frac{\widehat{u}_y}{\widehat{v}} = \frac{1}{\widehat{v}}\left(b\widehat{u}_\xi + b'\widehat{u}_\eta + b''\widehat{u}_\zeta\right)\\
\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} &= \frac{\widehat{u}_z}{\widehat{v}} = \frac{1}{\widehat{v}}\left(c\widehat{u}_\xi + c'\widehat{u}_\eta + c''\widehat{u}_\zeta\right)
\end{aligned}\right\}$$

multiplicirt werden, so ergibt sich mit Beachtung der Gleichungen (d) und der Bedingungsgleichungen zwischen den Coeffizienten a, b, c, etc.

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} = m\left(\frac{\widehat{u}_x}{\widehat{v}}\frac{du_x}{dt} + \frac{\widehat{u}_y}{\widehat{v}}\frac{du_y}{dt} + \frac{\widehat{u}_z}{\widehat{v}}\frac{du_z}{dt}\right)\\
&= m\left(\frac{\widehat{u}_x}{\widehat{v}}\frac{d\widehat{u}_x}{dt} + \frac{\widehat{u}_y}{\widehat{v}}\frac{d\widehat{u}_y}{dt} + \frac{\widehat{u}_z}{\widehat{v}}\frac{d\widehat{u}_z}{dt}\right) + m\left(\frac{\widehat{u}_\xi}{\widehat{v}}\frac{d^2\xi}{dt^2} + \frac{\widehat{u}_\eta}{\widehat{v}}\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{\widehat{u}_\zeta}{\widehat{v}}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\\
&+ m\frac{\widehat{u}_\eta}{\widehat{v}}\frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right) + m\frac{\widehat{u}_\zeta}{\widehat{v}}\frac{d\xi}{dt}\left(a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt}\right)\\
&+ m\frac{\widehat{u}_\xi}{\widehat{v}}\frac{d\eta}{dt}\left(a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt}\right) + m\frac{\widehat{u}_\zeta}{\widehat{v}}\frac{d\eta}{dt}\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\\
&+ m\frac{\widehat{u}_\xi}{\widehat{v}}\frac{d\zeta}{dt}\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right) + m\frac{\widehat{u}_\eta}{\widehat{v}}\frac{d\zeta}{dt}\left(a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt}\right)
\end{aligned}\right\},$$

oder wenn man die Werthe (Buch II., §. 185):

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p} &= a''\frac{da'}{dt} + b''\frac{db'}{dt} + c''\frac{dc'}{dt} = -\left(a'\frac{da''}{dt} + b'\frac{db''}{dt} + c'\frac{dc''}{dt}\right)\\
\mathfrak{q} &= a\frac{da''}{dt} + b\frac{db''}{dt} + c\frac{dc''}{dt} = -\left(a''\frac{da}{dt} + b''\frac{db}{dt} + c''\frac{dc}{dt}\right)\\
\mathfrak{r} &= a'\frac{da}{dt} + b'\frac{db}{dt} + c'\frac{dc}{dt} = -\left(a\frac{da'}{dt} + b\frac{db'}{dt} + c\frac{dc'}{dt}\right)
\end{aligned}\right\}$$

einführt und einige sich leicht ergebende Umwandlungen vornimmt:

$$\text{i.)}\quad \left\{\begin{aligned}&\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}+\mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}}+\mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}=\frac{1}{2}\frac{d.m\widehat{v}^2}{d\widehat{s}}+m\left(\frac{\widehat{u_\xi}}{\widehat{v}}\frac{d^2\xi}{dt^2}+\frac{\widehat{u_\eta}}{\widehat{v}}\frac{d^2\eta}{dt^2}+\frac{\widehat{u_\zeta}}{\widehat{v}}\frac{d^2\zeta}{dt^2}\right)\\&+m\frac{d\xi}{d\widehat{s}}(\mathfrak{q}\widehat{u_\zeta}-\mathfrak{r}\widehat{u_\eta})+m\frac{d\eta}{d\widehat{s}}(\mathfrak{r}\widehat{u_\xi}-\mathfrak{p}\widehat{u_\zeta})+m\frac{d\zeta}{d\widehat{s}}(\mathfrak{p}\widehat{u_\eta}-\mathfrak{q}\widehat{u_\xi}).\end{aligned}\right.$$

Bezeichnet man demnach die Geschwindigkeit des Anfangspunktes der beweglichen Coordinaten-Achsen mit $\mathfrak{v}$, ihre Componenten nach den parallel bleibenden Achsen mit $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$, so daß man hat

$$\mathfrak{u}_x=\frac{dx}{dt}\quad,\qquad \mathfrak{u}_y=\frac{dy}{dt}\quad,\qquad \mathfrak{u}_z=\frac{dz}{dt}\quad,$$

ihre Componenten nach den sich drehenden Achsen mit $\mathfrak{u}_\xi$, $\mathfrak{u}_\eta$, $\mathfrak{u}_\zeta$, so finden wieder die Beziehungen statt:

$$\text{k.)}\quad \left\{\begin{aligned}\mathfrak{u}_\xi&=a\,\mathfrak{u}_x+b\,\mathfrak{u}_y+c\,\mathfrak{u}_z\\ \mathfrak{u}_\eta&=a'\,\mathfrak{u}_x+b'\,\mathfrak{u}_y+c'\,\mathfrak{u}_z\\ \mathfrak{u}_\zeta&=a''\mathfrak{u}_x+b''\mathfrak{u}_y+c''\mathfrak{u}_z\end{aligned}\right.$$

und man wird mit diesen und den Gleichungen (e) aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned}x,&=a\xi+a'\eta+a''\zeta\\ y,&=b\xi+b'\eta+b''\zeta\\ z,&=c\xi+c'\eta+b''\zeta\end{aligned}\right.$$

wie in §. 14, die Werthe ziehen:

$$\text{l.)}\quad \left\{\begin{aligned}\widehat{u_\xi}&=u_\xi-\frac{d\xi}{dt}=\mathfrak{u}_\xi+\mathfrak{q}\zeta-\mathfrak{r}\eta\,,\\ \widehat{u_\eta}&=u_\eta-\frac{d\eta}{dt}=\mathfrak{u}_\eta+\mathfrak{r}\xi-\mathfrak{p}\zeta\,,\\ \widehat{u_\zeta}&=u_\zeta-\frac{d\zeta}{dt}=\mathfrak{u}_\zeta+\mathfrak{p}\eta-\mathfrak{q}\xi\,.\end{aligned}\right.$$

Führt man diese in die Gleichung (i) ein, und bezeichnet die Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ der innern Geschwindigkeit w mit w_ξ, w_η, w_ζ, so geht diese Gleichung in folgende über:

$$\mathfrak{X}\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Y}\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{Z}\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} =$$

$$= \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2}\frac{d.m\widehat{v}^2}{d\widehat{s}} \\ & + m\mathfrak{p}\left(\eta\frac{dw_\zeta}{d\widehat{s}} - \zeta\frac{dw_\eta}{d\widehat{s}}\right) + m\mathfrak{q}\left(\zeta\frac{dw_\xi}{d\widehat{s}} - \xi\frac{dw_\zeta}{d\widehat{s}}\right) + m\mathfrak{r}\left(\xi\frac{dw_\eta}{d\widehat{s}} - \eta\frac{dw_\xi}{d\widehat{s}}\right) \\ & + m\mathfrak{p}^2\left(\eta\frac{d\eta}{d\widehat{s}} + \zeta\frac{d\zeta}{d\widehat{s}}\right) + m\mathfrak{q}^2\left(\xi\frac{d\xi}{d\widehat{s}} + \zeta\frac{d\zeta}{d\widehat{s}}\right) + m\mathfrak{r}^2\left(\xi\frac{d\xi}{d\widehat{s}} + \eta\frac{d\eta}{d\widehat{s}}\right) \\ & - m\mathfrak{p}\mathfrak{q}\left(\xi\frac{d\eta}{d\widehat{s}} + \eta\frac{d\xi}{d\widehat{s}}\right) - m\mathfrak{p}\mathfrak{r}\left(\xi\frac{d\zeta}{d\widehat{s}} + \zeta\frac{d\xi}{d\widehat{s}}\right) - m\mathfrak{q}\mathfrak{r}\left(\eta\frac{d\zeta}{d\widehat{s}} + \zeta\frac{d\eta}{d\widehat{s}}\right) \\ & + m\left(\mathfrak{w}_\xi\frac{dw_\xi}{d\widehat{s}} + \mathfrak{w}_\eta\frac{dw_\eta}{d\widehat{s}} + \mathfrak{w}_\zeta\frac{dw_\zeta}{d\widehat{s}}\right) \\ & + m\frac{d\xi}{d\widehat{s}}(\mathfrak{q}\mathfrak{w}_\zeta - \mathfrak{r}\mathfrak{w}_\eta) + m\frac{d\eta}{d\widehat{s}}(\mathfrak{r}\mathfrak{w}_\xi - \mathfrak{p}\mathfrak{w}_\zeta) + m\frac{d\zeta}{d\widehat{s}}(\mathfrak{p}\mathfrak{w}_\eta - \mathfrak{q}\mathfrak{w}_\xi). \end{aligned} \right.$$

Beachtet man ferner, daß

$$\eta\frac{dw_\zeta}{d\widehat{s}} - \zeta\frac{dw_\eta}{d\widehat{s}} = \frac{d.(\eta w_\zeta - \zeta w_\eta)}{d\widehat{s}}, \quad \zeta\frac{dw_\xi}{d\widehat{s}} - \xi\frac{dw_\zeta}{d\widehat{s}} = \frac{d.(\zeta w_\xi - \xi w_\zeta)}{d\widehat{s}}$$

$$\xi\frac{dw_\eta}{d\widehat{s}} - \eta\frac{dw_\xi}{d\widehat{s}} = \frac{d.(\xi w_\eta - \eta w_\xi)}{d\widehat{s}}$$

die Aenderungsgesetze der um die Achsen der ξ, η, ζ stattfindenden drehenden Wirkungen μ_ξ, μ_η, μ_ζ der innern Bewegungsgröße mw in Bezug auf $\widehat{s}$ sind, nimmt dann mit Berücksichtigung der Größen, welche für alle Punkte des Systems dieselben Werthe behalten, die Summe der äußern Arbeiten aller Kräfte $\mathfrak{P}$, und bezeichnet wie früher die Massemomente des Systems

$$\Sigma.m(\eta^2 + \zeta^2) \quad , \quad \Sigma.m(\xi^2 + \zeta^2) \quad , \quad \Sigma.m(\xi^2 + \eta^2)$$

in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ mit

$$\mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C}$$

ebenso die Summen:

$$\Sigma . m \xi \eta \quad , \quad \Sigma . m \xi \zeta \quad , \quad \Sigma . m \eta \zeta ,$$

der Reihe nach mit

$$\mathfrak{F} \quad , \quad \mathfrak{G} \quad , \quad \mathfrak{H} ,$$

endlich die Summen der drehenden Wirkungen μ_ξ, μ_η, μ_ζ, oder die Componenten der drehenden Wirkung der ganzen innern Bewegungsgröße $\Sigma . m w$ des Systems mit M_ξ, M_η, M_ζ, so wird man leicht finden, daß nun die Gleichung (25) die Form annimmt:

$$26.) \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d . \Sigma . m \widehat{v}^2}{d\widehat{s}} = \Sigma . \left(X \frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y \frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z \frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}} \right) \\ - \mathfrak{p} \frac{d . M_\xi}{d\widehat{s}} - \mathfrak{q} \frac{d . M_\eta}{d\widehat{s}} - \mathfrak{r} \frac{d . M_\zeta}{d\widehat{s}} \\ - \tfrac{1}{2} \mathfrak{p}^2 \frac{d \mathfrak{A}}{d\widehat{s}} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{q}^2 \frac{d \mathfrak{B}}{d\widehat{s}} - \tfrac{1}{2} \mathfrak{r}^2 \frac{d \mathfrak{C}}{d\widehat{s}} \\ + \mathfrak{p}\mathfrak{q} \frac{d \mathfrak{F}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{p}\mathfrak{r} \frac{d \mathfrak{G}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{q}\mathfrak{r} \frac{d \mathfrak{H}}{d\widehat{s}} \\ - \mathfrak{u}_\xi \Sigma . m \frac{d w_\xi}{d\widehat{s}} - \mathfrak{u}_\eta \Sigma . m \frac{d w_\eta}{d\widehat{s}} - \mathfrak{u}_\zeta \Sigma . m \frac{d w_\zeta}{d\widehat{s}} \\ - (\mathfrak{q} \mathfrak{u}_\zeta - \mathfrak{r} \mathfrak{u}_\eta) \Sigma . m \frac{d \xi}{d\widehat{s}} - (\mathfrak{r} \mathfrak{u}_\xi - \mathfrak{p} \mathfrak{u}_\zeta) \Sigma . m \frac{d \eta}{d\widehat{s}} \\ - (\mathfrak{p} \mathfrak{u}_\eta - \mathfrak{q} \mathfrak{u}_\xi) \Sigma . m \frac{d \zeta}{d\widehat{s}} . \end{aligned} \right.$$

Trifft man daher noch die Bestimmung, daß der Mittelpunkt der Masse des Systems der Anfangspunkt der beweglichen Achsen sei und daß die Hauptachsen in diesem Punkte die sich drehenden Achsen vorstellen sollen, so erhält man die Bedingungen:

$$\Sigma . m \xi = 0 \quad , \quad \Sigma . m \eta = 0 \quad , \quad \Sigma . m \zeta = 0$$
$$\mathfrak{F} = 0 \quad , \quad \mathfrak{G} = 0 \quad , \quad \mathfrak{H} = 0$$

es fallen demnach die vier letzten Zeilen der vorstehenden Gleichung hinaus, und sie wird dadurch die einfachste Form:

$$\left.\begin{aligned}\frac{d.\Sigma.m\widehat{v}^2}{d\widehat{s}} = 2\Sigma\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right) \\ -\mathfrak{p}^2\frac{d\mathfrak{A}}{d\widehat{s}} - \mathfrak{q}^2\frac{d\mathfrak{B}}{d\widehat{s}} - \mathfrak{r}^2\frac{d\mathfrak{C}}{d\widehat{s}} \\ -2\mathfrak{p}\frac{dM_\xi}{d\widehat{s}} - 2\mathfrak{q}\frac{dM_\eta}{d\widehat{s}} - 2\mathfrak{r}\frac{dM_\zeta}{d\widehat{s}}\end{aligned}\right\}$$

annehmen, unter welcher sie das Gesetz ausspricht, nach welchem sich die äußere lebendige Kraft durch die äußere Arbeit der äußern Kräfte mit Rücksicht auf die Aenderungen im innern Zustande des Systems in jedem Augenblicke zu ändern im Begriffe steht. Die wirkliche Aenderung dieser äußern lebendigen Kraft ergibt sich daher durch das Integral:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma.m v^2 - \Sigma.m v_0^2 = 2\Sigma\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}} + Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}} + Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right) \\ -\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(\mathfrak{p}^2\frac{d\mathfrak{A}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{q}^2\frac{d\mathfrak{B}}{d\widehat{s}} + \mathfrak{r}^2\frac{d\mathfrak{C}}{d\widehat{s}}\right) \\ -2\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(\mathfrak{p}\frac{d.M_\xi}{d\widehat{s}} + \mathfrak{q}\frac{d.M_\eta}{d\widehat{s}} + \mathfrak{r}\frac{d.M_\zeta}{d\widehat{s}}\right)\end{aligned}\right\} \quad (27.$$

Anstatt der Hauptachsen, welche freilich die einzigen sind, die mit dem System in einem nothwendigen Zusammenhange stehen, kann man übrigens auch wieder drei andere durch den Mittelpunkt der Masse gezogene unter sich senkrechte Geraden als Coordinaten-Achsen der ξ, η, ζ wählen, und diesen eine vorgeschriebene drehende Bewegung beilegen, und es wird im jetzigen Falle das einfachste sein, die Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ dieses Coordinatensystems constant anzunehmen; denn man erhält dadurch mit Berücksichtigung der Bedingung, daß der Mittelpunkt der Masse der bewegliche Anfangspunkt bleibt, aus der Gleichung (26) das Integral:

$$28.)\left\{\begin{array}{l}\Sigma.m\widehat{v}^2-\Sigma.m\widehat{v}_0^{\,2}=2\Sigma.\int_{\widehat{s}_0}^{\widehat{s}} d\widehat{s}\left(X\frac{d\widehat{x}}{d\widehat{s}}+Y\frac{d\widehat{y}}{d\widehat{s}}+Z\frac{d\widehat{z}}{d\widehat{s}}\right)\\ -(\mathfrak{A}-\mathfrak{A}_0)\,\mathfrak{p}^2-(\mathfrak{B}-\mathfrak{B}_0)\,\mathfrak{q}^2-(\mathfrak{C}-\mathfrak{C}_0)\,\mathfrak{r}^2,\\ +2(\mathfrak{F}-\mathfrak{F}_0)\,\mathfrak{p}\mathfrak{q}+2(\mathfrak{G}-\mathfrak{G}_0)\,\mathfrak{p}\mathfrak{r}+2(\mathfrak{H}-\mathfrak{H}_0)\,\mathfrak{q}\mathfrak{r},\\ -2\mathfrak{p}(M_\xi-M_\xi^{(0)})-2\mathfrak{q}(M_\eta-M_\eta^{(0)})-2\mathfrak{r}(M_\zeta-M_\zeta^{(0)}),\end{array}\right.$$

worin $\mathfrak{A}_0$, $\mathfrak{B}_0$, $M_\xi^{(0)}$, etc. die anfänglichen Werthe der mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, M_ξ, etc. bezeichneten Größen vorstellen.

Für $\mathfrak{p}=\mathfrak{q}=\mathfrak{r}=0$ kommt die vorstehende Gleichung auf ihre erste Zeile zurück; man hat dann aber auch gemäß der Gleichungen (1)

$$\widehat{u}_\xi=\mathfrak{u}_\xi=\mathfrak{U}_\xi\quad,\quad\widehat{u}_\eta=\mathfrak{u}_\eta=\mathfrak{U}_\eta\quad,\quad\widehat{u}_\zeta=\mathfrak{u}_\zeta=\mathfrak{U}_\zeta\,,$$

wenn $\mathfrak{U}_\xi$, $\mathfrak{U}_\eta$, $\mathfrak{U}_\zeta$ die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ des Mittelpunktes der Masse sind, woraus dann weiter

$$\widehat{v}=\mathfrak{V}\quad,\quad\widehat{x}=\mathfrak{X}\quad,\quad\widehat{y}=\mathfrak{Y}\quad,\quad\widehat{z}=\mathfrak{Z}\quad,\quad\widehat{s}=\mathfrak{S}\,,$$

folgt und sich die Gleichung

$$29.)\quad M\mathfrak{V}^2-M\mathfrak{V}_0^{\,2}=2\Sigma.\int_{\mathfrak{S}_0}^{\mathfrak{S}} d\mathfrak{S}\left(X\frac{d\mathfrak{X}}{d\mathfrak{S}}+Y\frac{d\mathfrak{Y}}{d\mathfrak{S}}+Z\frac{d\mathfrak{Z}}{d\mathfrak{S}}\right),$$

ergibt, welche die Aenderung der lebendigen Kraft des die ganze Masse in sich vereinigenden Mittelpunktes ausdrückt und auch unmittelbar aus den Gleichungen (12) in §. 12 hervorgehet.

Soll endlich das System ein unveränderliches sein, so wird man leicht erkennen, daß die rechte Seite der Gleichung (26) für jede Lage des beweglichen Anfangspunktes auf das erste Glied zurückkommt, daß man nun aber auch hat

$$\widehat{u}_\xi=u_\xi\quad,\quad\widehat{u}_\eta=u_\eta\quad,\quad\widehat{u}_\zeta=u_\zeta\quad,\quad\widehat{v}=v\,,$$

$$\widehat{x}=x\quad,\quad\widehat{y}=y\quad,\quad\widehat{z}=z\quad,\quad\widehat{s}=s\,,$$

daß folglich das Integral der genannten Gleichung:

$$\Sigma . m v^2 - \Sigma . m v_0^2 = 2 \Sigma . \int_{s_0}^{s} ds \left(X \frac{dx}{ds} + Y \frac{dy}{ds} + Z \frac{dz}{ds} \right) \quad (30$$

mit der Gleichung (139) des vorhergehenden Buches (§. 206) gleichbedeutend ist.

§. 21.

Die Gesetze, welche wir im Vorhergehenden abgeleitet haben, gelten in dieser Form nur für die äußere Bewegung eines freien Systems; sie können jedoch, wie es bei festen Systemen der Fall war, auch auf solche veränderliche Systeme ausgedehnt werden, welche in ihrer Bewegung dadurch beschränkt sind, daß ein oder mehrere Punkte oder ganze Theile derselben als unbeweglich vorausgesetzt oder in ihrer Bewegung gewissen Bedingungen unterworfen werden, die wir wieder dadurch anschaulich machen können, daß wir uns gewisse Curven oder Flächen denken, auf welchen bestimmte Punkte des Systems während seiner Bewegung bleiben müssen. Die Gleichungen für diese Bewegung werden sich dann aus den allgemeinen Gleichungen (9) und (10) dadurch ergeben, daß wir in diese die normalen Widerstände, welche jene Flächen oder Curven zu leisten haben als Kräfte von unbekannter Intensität einführen und durch Elimination daraus entfernen. Die genannten Gleichungen nehmen dadurch, wie für feste Systeme, die Form an:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \frac{d^2 x}{dt^2} &= \Sigma . X - \Sigma . N \cos \lambda \\ \Sigma . m \frac{d^2 y}{dt^2} &= \Sigma . Y - \Sigma . N \cos \mu \\ \Sigma . m \frac{d^2 z}{dt^2} &= \Sigma . Z - \Sigma . N \cos \nu \end{aligned}\right\}, \quad (30.$$

und

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) &= \Sigma . M_Z - \Sigma . N (x' \cos \mu - y' \cos \lambda) \\ \Sigma . m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) &= \Sigma . M_Y - \Sigma . N (z' \cos \lambda - x' \cos \nu) \\ \Sigma . m \left(y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} \right) &= \Sigma . M_X - \Sigma . N (y' \cos \nu - z' \cos \mu) \end{aligned}\right\}, \quad (31.$$

worin N einen dieser Widerstände, λ, μ, ν die Winkel zwischen seiner Richtung und den drei festen Coordinaten-Achsen und x', y', z' die

Coordinaten des entsprechenden in seiner Bewegung beschränkten Punktes bezeichnen. Diese Gleichungen können dann in dem Falle, wo zwischen den die Bewegung beschränkenden Flächen und den darauf sich stützenden Punkten des Systems keine Reibung stattfindet, wieder in solche umgewandelt werden, welche sich auf ein durch den Mittelpunkt der Masse gelegtes parallel fortschreitendes Coordinatensystem beziehen, welche also aus den Gleichungen (12.) und (14.) hervorgehen, wenn in diese die Widerstände N eingeführt werden. Man erhält dadurch einerseits für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes die Gleichungen:

$$32.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2 X}{dt^2} = \Sigma . X - \Sigma . N \cos\lambda \\ M\dfrac{d^2 Y}{dt^2} = \Sigma . Y - \Sigma . N \cos\mu \\ M\dfrac{d^2 Z}{dt^2} = \Sigma . Z - \Sigma . N \cos\nu \end{cases}$$

und dann für die drehende Bewegung um denselben die Gleichungen:

$$33.)\quad \begin{cases} \Sigma . m\left(x_{,}\dfrac{d^2 y_{,}}{dt^2} - y_{,}\dfrac{d^2 x_{,}}{dt^2}\right) = \Sigma . M_{z,} - \Sigma . N(x_{,}' \cos\mu - y_{,}' \cos\lambda) , \\ \Sigma . m\left(z_{,}\dfrac{d^2 x_{,}}{dt^2} - x_{,}\dfrac{d^2 z_{,}}{dt^2}\right) = \Sigma . M_{y,} - \Sigma . N(z_{,}' \cos\lambda - x_{,}' \cos\nu) , \\ \Sigma . m\left(y_{,}\dfrac{d^2 z_{,}}{dt^2} - z_{,}\dfrac{d^2 y_{,}}{dt^2}\right) = \Sigma . M_{x,} - \Sigma . N(y_{,}' \cos\nu - z_{,}' \cos\mu) , \end{cases}$$

aus welchen in jedem Falle der Anwendung die unbekannten Kräfte N noch eliminirt werden müssen, wie im vorhergehenden Buche gezeigt worden ist.

Zu diesem Zwecke reichen die vorhergehenden sechs Gleichungen bei festen Systemen immer aus; bei veränderlichen Systemen dagegen kann einerseits der Fall eintreten, daß diese sechs Gleichungen nicht mehr genügen, um alle Widerstände N. zu eliminiren, da hier viel mehr Punkte in ihrer Bewegung beschränkt werden können, ohne die Bewegung überhaupt ganz aufzuheben, als dort, und dann werden auf der andern Seite die in ihrer Bewegung beschränkten Punkte oder Theile des Systems im Allgemeinen auch in ihrer innern Bewegung beschränkt sein; sie werden daher, sofern diese durch besondere innere Kräfte hervorgerufen wird, auch wegen dieser Beschränkung einen Druck auf die

die beschränkenden Hindernisse ausüben und einen im entgegengesetzten Sinne gerichteten Widerstand hervorrufen, welcher als äußere Kraft in die obigen Gleichungen eintritt, dessen Intensität aber nur durch die innern Kräfte und die innere Bewegung bestimmt werden kann, nämlich dadurch, daß man denselben auch in die Gleichung für die innere Bewegung des Berührungspunktes einführt. In solchen Fällen müssen demnach beide Bewegungen neben einander betrachtet und combinirt werden, um die unbekannten Widerstände aus den Gleichungen dieser Bewegungen eliminiren zu können.

Ein ähnlicher Fall tritt ein, wenn durch den Druck der in ihrer Bewegung beschränkten Punkte auf die beschränkenden Hindernisse Reibung erzeugt wird, da diese auch wie der Widerstand einer festen Fläche wirken kann, nämlich dann, wenn sie größer ist, als der auf den entsprechenden Berührungspunkt ausgeübte Schub, d. h. als die Kraft, welche denselben auf der die Bewegung beschränkenden Fläche fortschieben will. In diesen Fällen müssen daher die Gleichungen (9) und (10), nachdem in dieselben sowohl die Widerstände N als die dadurch hervorgerufenen Reibungen fN eingeführt worden, wie im vorhergehenden Buche §. 215 u. f. gezeigt wurde, zuerst in andere umgewandelt werden, welche sich auf den betreffenden Berührungspunkt beziehen, d. h. auf ein Coordinatensystem, dessen Achsen zu den festen Coordinaten-Achsen parallel bleiben und dessen Anfangspunkt der betreffende Berührungspunkt ist, um unterscheiden zu können, wann die fördernde Wirkung der Reibung größer und wann kleiner ist, als der tangentiale Schub. Für diesen werden nun aber auch die innern Kräfte maßgebend, wenn sie den Berührungspunkt auf der ihn beschränkenden Fläche gleiten machen wollen; man muß deßhalb in diesem Falle wie im vorhergehenden beide Bewegungen, die innere und die äußere, verbinden, um den ganzen tangentialen Schub bestimmen zu können. Ist dann die Reibung fN größer als die letztere Kraft, so wirkt sie gerade so wie der Widerstand eines festen Punktes, an welchem sich der Berührungspunkt stützt und muß wie eine solche Kraft von unbekannter Intensität eliminirt werden; ist sie dagegen kleiner, so kann sie wie jede andere Kraft in die Gleichungen (9) und (10) oder (12) und (14) eingeführt und die Bewegung des Systems unmittelbar in Bezug auf das durch den Mittelpunkt der Masse gelegte Coordinatensystem untersucht werden.

Die Gleichungen, welche zu der vorhergehenden Untersuchung nothwendig sind und sich auf ein durch den in Betrachtung zu nehmenden Berührungspunkt gelegtes Coordinatensystem beziehen, ergeben sich einfach

aus unsern Gleichungen (11) und (13), wenn darin die Widerstände N und die Reibungen fN eingeführt werden, und man jenen Berührungspunkt als denjenigen nimmt, dessen Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen dort mit x, y, z bezeichnet sind. Für unsern jetzigen Zweck wollen wir dieselben aber wie im vorhergehenden Buche (§. 216 u. f.) mit $x_{,}$ $y_{,}$ $z_{,}$ bezeichnen und die Coordinaten irgend eines andern Punktes im System in Bezug auf parallele Achsen, deren Anfang der betreffende Berührungspunkt ist, durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, die des Mittelpunktes der Masse insbesondere durch $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ darstellen. Dadurch werden die Gleichungen (11)

$$34.)\quad \begin{cases} M\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2} = \Sigma.X - M\dfrac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} - \Sigma.N(\cos\lambda \pm f\cos l) \\[2ex] M\dfrac{d^2y_{,}}{dt^2} = \Sigma.Y - M\dfrac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} - \Sigma.N(\cos\mu \pm f\cos m) \\[2ex] M\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2} = \Sigma.Z - M\dfrac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} - \Sigma.N(\cos\nu \pm f\cos n) \end{cases}$$

Die Gleichungen (13) dagegen werden den dem Berührungs- und Anfangspunkt der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ entsprechenden Druck N sowie die von demselben erzeugte Reibung nicht enthalten, und daher die allgemeine Form annehmen:

$$35.)\quad \begin{cases} \Sigma.m\left(\mathfrak{x}\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2} - \mathfrak{y}\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\right) = M_z - M\left(\mathfrak{X}\dfrac{d^2y_{,}}{dt^2} - \mathfrak{Y}\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2}\right) \\ \qquad - \Sigma.N'(\mathfrak{x}'\cos\mu' - \mathfrak{y}'\cos\lambda') \pm \Sigma.fN'(\mathfrak{x}'\cos m' - \mathfrak{y}'\cos l'), \\[2ex] \Sigma.m\left(\mathfrak{z}\dfrac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} - \mathfrak{x}\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\right) = M_y - M\left(\mathfrak{Z}\dfrac{d^2x_{,}}{dt^2} - \mathfrak{X}\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2}\right) \\ \qquad - \Sigma.N'(\mathfrak{z}'\cos\lambda' - \mathfrak{x}'\cos\nu') \pm \Sigma.fN'(\mathfrak{z}'\cos l' - \mathfrak{x}'\cos n'), \\[2ex] \Sigma.m\left(\mathfrak{y}\dfrac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2} - \mathfrak{z}\dfrac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\right) = M_x - M\left(\mathfrak{Y}\dfrac{d^2z_{,}}{dt^2} - \mathfrak{Z}\dfrac{d^2y_{,}}{dt^2}\right) \\ \qquad - \Sigma.N'(\mathfrak{y}'\cos\nu' - \mathfrak{z}'\cos\mu') \pm \Sigma.fN'(\mathfrak{y}'\cos n' - \mathfrak{z}'\cos m'). \end{cases}$$

Die Anwendung dieser letzten Gleichungen kann zwar auch in dem Falle, wo die Reibung größer ist, als der tangentiale Schub am Berührungspunkte dadurch umgangen werden, daß man, wie schon bemerkt wurde, diese Reibung wie den Widerstand eines festen Punktes in die

Gleichungen (32) und (33) einführt und durch Elimination entfernt; die vorhergehenden Gleichungen sind aber der Natur der Bewegung entsprechender und drücken alle dabei obwaltenden Verhältnisse schärfer aus.

Ueberhaupt muß hier noch bemerkt werden, daß für die Untersuchung der Bewegung eines in seiner Bewegung beschränkten veränderlichen Systems die Gleichungen (32) und (33) nicht diejenigen sind, welche am einfachsten zum Ziele führen. In den meisten Fällen thut man besser, das System zuerst theilweise zu betrachten, die unbekannten innern Kräfte, welche die Verbindung zwischen den einzelnen Theilen herstellen, in die Gleichungen einzuführen, und sie dann durch die Verbindung der für die einzelnen Theile erhaltenen Gleichungen einerseits zu eliminiren und anderseits auch ihre Werthe zu bestimmen. Namentlich wird dieses Verfahren nothwendig werden, wenn das System aus mehreren festen Systemen, oder aus festen und stetig veränderlichen zusammengesetzt ist, wie dieß in der Anwendung am häufigsten vorkommt, und wofür einige einfache Beispiele gegeben werden sollen.

§. 22.

Nach den Formen, welche wir den Gleichungen (30) bis (35) gegeben haben, ist vorausgesetzt, daß nur einzelne Punkte des veränderlichen Systems in ihrer Bewegung beschränkt sind, also auch nur in einzelnen Punkten Druck und Widerstand stattfindet. Es kann hier aber auch der Fall eintreten, daß sich das System längs einer stetig aufeinanderfolgenden Reihe von Punkten, also längs einer Linie und selbst mit einer Fläche auf eine feste Fläche stützt und streng genommen wird dieß wegen der Zusammendrückbarkeit der Körper immer stattfinden. In diesem Falle gibt es für einen geometrisch bestimmten Punkt jener Berührungslinie oder Fläche keinen absoluten oder *physischen* Druck mehr, weil mit diesem jetzt nothwendig die Vorstellung einer gewissen *Länge* oder *Fläche* verbunden werden muß, auf welche er ausgeübt wird, sondern nur noch einen *geometrischen* Druck, welcher eine Function der Coordinaten des betreffenden Punktes ist und nach der innern Beschaffenheit des Systems bestimmt werden muß. Die rechtwinkligen Componenten dieses geometrischen Druckes stellen dann die Aenderungsgesetze der entsprechenden Componenten des physischen Druckes vor, welcher auf einen in jenem Punkte begrenzten Längen- oder Flächentheil der Berührungslinie oder Fläche ausgeübt wird, in Bezug auf die Aenderung dieses Längen- oder Flächentheiles; ebenso sind die Momente des geometrischen Druckes in Bezug auf die drei Coordinaten-Achsen die entsprechenden Aenderungsgesetze der um dieselben Achsen

stattfindenden drehenden Wirkungen des auf denselben Längen- oder Flächentheil ausgeübten physischen Druckes.

Beachtet man nun, daß der geometrische Druck in dem Punkte $x' y' z'$ einerseits eine Function dieser Veränderlichen oder doch der unabhängigen unter ihnen ist, also bei einer Berührungslinie eine Function von x', bei einer Berührungsfläche eine Function von x' und y', deren Form von der innern Beschaffenheit des Systems abhängt, und dann noch einen Factor enthalten muß, welcher den geometrischen Druck in einem bestimmten Punkte des bewegten Systems vorstellt, welcher also für die ganze Ausdehnung der Berührungslinie oder Berührungsfläche unveränderlich ist und die nun zu eliminirende Unbekannte sein wird, und bezeichnet man demgemäß die Intensität des geometrischen Druckes in dem Punkte $x' y' z'$ mit $n\psi$, worin n den zuletzt genannten Factor ψ die vorhererwähnte Function von x' oder von x' und y' bedeutet, ferner mit λ', μ', ν' die Winkel seiner Richtung gegen die drei Achsen, welche auch die der Normalen der gedrückten Fläche in dem betreffenden Punkte sind, so werden durch die Producte:

$$n\psi \cos\lambda' \quad , \quad n\psi \cos\mu' \quad , \quad n\psi \cos\nu'$$

seine rechtwinkligen fördernden Componenten, durch

$$n\psi(x' \cos\mu' - y' \cos\lambda') \quad , \quad n\psi(z' \cos\lambda' - x' \cos\nu')$$
$$n\psi(y' \cos\nu' - z' \cos\mu')$$

seine drehenden Wirkungen in Bezug auf die festen Achsen ausgedrückt werden, und man hat dann für eine Berührungslinie statt der Summenglieder $\Sigma . N \cos\lambda$, etc. die Integrale:

$$36.)\quad \begin{cases} \Sigma . N \cos\lambda = n\int_{s_0'}^{s'} ds' . \psi \cos\lambda' = n\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \cos\lambda' \dfrac{ds'}{dx'} \\[2ex] \Sigma . N \cos\mu = n\int_{s_0'}^{s'} ds' . \psi \cos\mu' = n\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \cos\mu' \dfrac{ds'}{dx'} \\[2ex] \Sigma . N \cos\nu = n\int_{s_0'}^{s'} ds' . \psi \cos\nu' = n\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \cos\nu' \dfrac{ds'}{dx'} \end{cases}$$

in die Gleichungen (30) einzuführen, für eine Berührungsfläche dagegen die Integrale:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma . N\cos\lambda &= n\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi\cos\lambda' \frac{d^2O}{dx'\,dy'}\\ \Sigma . N\cos\mu &= n\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi\cos\mu' \frac{d^2O}{dx'\,dy'}\\ \Sigma . N\cos\nu &= n\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi\cos\nu' \frac{d^2O}{dx'\,dy'}\end{aligned}\right\}$$

oder da man auch hat (B. II., §. 54.)

$$\frac{d^2O}{dx'\,dy'} = \frac{1}{\cos\nu'},$$

in einfacherer Form:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma . N\cos\lambda = n\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi\frac{\cos\lambda'}{\cos\nu'},\quad \Sigma . N\cos\mu = n\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi\frac{\cos\mu'}{\cos\nu'}\\ \Sigma . N\cos\nu = n\int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi .\end{aligned}\right\}, \quad (37.$$

Auf gleiche Weise wird man in den Gleichungen (31) die Momente $\Sigma . N(x\cos\mu - y\cos\lambda)$ u. s. f. durch folgende Integrale ersetzen, für eine Berührungslinie durch die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}\Sigma . N(x'\cos\mu - y'\cos\lambda) &= n\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'} (x'\cos\mu' - y'\cos\lambda')\\ \Sigma . N(z'\cos\lambda - x'\cos\nu) &= n\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'} (z'\cos\lambda' - x'\cos\nu')\\ \Sigma . N(y'\cos\nu - z'\cos\mu) &= n\int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'} (y'\cos\nu' - z'\cos\mu')\end{aligned}\right\} \quad (38.$$

für eine Berührungsfläche durch die Werthe:

$$39.)\begin{cases} \Sigma.N(x'\cos\mu-y'\cos\lambda)=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\frac{\psi}{\cos\nu'}(x'\cos\mu'-y'\cos\lambda') \\ \Sigma.N(z'\cos\lambda-x'\cos\nu)=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\frac{\psi}{\cos\nu'}(z'\cos\lambda'-x'\cos\nu') \\ \Sigma.N(y'\cos\nu-z'\cos\mu)=n\int_{x_0'}^{x'}dx'\int_{y_0'}^{y'}dy'.\frac{\psi}{\cos\nu'}(y'\cos\nu'-z'\cos\mu') \end{cases}$$

In allen diesen Ausdrücken sind die Winkelfunctionen $\cos\lambda'$, $\cos\mu'$, $\cos\nu'$ aus der Gleichung: $z'=F(x', y')$ der die Bewegung beschränkenden Fläche mittels der Beziehungen:

$$\cos\nu'=\pm\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz'}{dx'}\right)^2+\left(\frac{dz'}{dy'}\right)^2}},$$

$$\cos\lambda'=-\frac{dz'}{dx'}\cos\nu', \quad \cos\mu'=-\frac{dz'}{dy'}\cos\nu'$$

als Functionen der Veränderlichen x' und y', und dann für die Integrale (36) und (38) mittels der Projectionsgleichung: $y'=f(x')$ der Berührungscurven in Function von x' allein darzustellen. Die Grenzen der Integrale bestimmen sich hier nach der Ausdehnung der Berührungslinie, in den Integralen (37) und (39) nach der Begrenzung des gedrückten Flächentheiles.

Auf ähnliche Weise lassen sich dann auch die fördernden und drehenden Componenten der **Reibung** ausdrücken. Bezeichnet f den Reibungs-Coeffizienten, welcher für die ganze Ausdehnung der Berührungslinie oder Berührungsfläche und für jede Lage des Systems auf der die Bewegung beschränkenden Fläche als unveränderlich vorausgesetzt wird, so wird die in dem Punkte x' y' z' stattfindende geometrische Reibung durch $fn\psi$ ausgedrückt; ihre Richtung ist der der Bewegung dieses Punktes gerade entgegengesetzt. Stellt daher $y'_0=f_0(x_0')$ die Gleichung der auf die Ebene der xy projicirten Curve vor, welche von dem Punkte

$x'y'z'$ auf der die Bewegung beschränkenden Fläche: $z' = f(x', y')$ beschrieben wird, so können die Cosinus der Winkel l', m', n', welche die Richtung der Bewegung jenes Punktes mit den drei Achsen bildet, durch

$$\cos l' = \frac{d x_0'}{d s_0'}, \quad \cos m' = \frac{d y_0'}{d s_0'}, \quad \cos n' = \frac{d z_0'}{d s_0'}$$

ausgedrückt werden, und man erhält damit für die fördernden Componenten der Reibung in dem betreffenden Punkte die Werthe:

$$f n \psi \frac{d x_0'}{d s_0'}, \quad f n \psi \frac{d y_0'}{d s_0'}, \quad f n \psi \frac{d z_0'}{d s_0'},$$

woraus wieder die drehenden Componenten auf gewöhnliche Weise hervorgehen und in Bezug auf die festen Achsen der x, y, z die Formen annehmen:

$$f n \psi \left(y' \frac{d z_0'}{d s_0'} - z' \frac{d y_0'}{d s_0'}\right), \quad f n \psi \left(z' \frac{d x_0'}{d s_0'} - x' \frac{d z_0'}{d s_0'}\right),$$

$$f n \psi \left(x' \frac{d y_0'}{d s_0'} - y' \frac{d x_0'}{d s_0'}\right).$$

Für die fördernden Componenten der physischen Reibung hat man demnach bei einer Berührungslinie wieder die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} \Sigma . f N \cos l' &= f n \int_{x_0'}^{x'} d x' . \psi \frac{d x_0'}{d s_0'} . \frac{d s'}{d x'} \\ \Sigma . f N \cos m' &= f n \int_{x_0'}^{x'} d x' . \psi \frac{d y_0'}{d s_0'} . \frac{d s'}{d x'} \\ \Sigma . f N \cos n' &= f n \int_{x_0'}^{x'} d x' . \psi \frac{d z_0'}{d s_0'} . \frac{d s'}{d x'} \end{aligned}\right\} \quad (40.$$

für eine Berührungsfläche dagegen die Integrale:

$$41.)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma . fN \cos l' &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{dx_0'}{ds_0'} . \frac{d^2O}{dx'dy'} \\ \Sigma . fN \cos m' &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{dy_0'}{ds_0'} . \frac{d^2O}{dx'dy'} \\ \Sigma . fN \cos n' &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{dz_0'}{ds_0'} . \frac{d^2O}{dx'dy'} \end{aligned} \right.$$

zu berechnen, und die drehenden Wirkungen der physischen Reibung um die festen Achsen der x, y, z ergeben sich für eine Berührungslinie unter der Form:

$$42.)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma . fN (y' \cos n' - z' \cos m') &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'} \left(y' \frac{dz_0'}{ds_0'} - z' \frac{dy_0'}{ds_0'} \right), \\ \Sigma . fN (z' \cos l' - x' \cos n') &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'} \left(z' \frac{dx_0'}{ds_0'} - x' \frac{dz_0'}{ds_0'} \right), \\ \Sigma . fN (x' \cos m' - y' \cos l') &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' . \psi \frac{ds'}{dx'} \left(x' \frac{dy_0'}{ds_0'} - y' \frac{dx_0'}{ds_0'} \right), \end{aligned} \right.$$

für eine Berührungsfläche dagegen hat man die Ausdrücke:

$$43.)\quad \left\{ \begin{aligned} \Sigma . fN (y' \cos n' - z' \cos m') &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{d^2O}{dx'dy'} \left(y' \frac{dz_0'}{ds_0'} - z' \frac{dy_0'}{ds_0'} \right) \\ \Sigma . fN (z' \cos l' - x' \cos n') &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{d^2O}{dx'dy'} \left(z' \frac{dx_0'}{ds_0'} - x' \frac{dz_0'}{ds_0'} \right) \\ \Sigma . fN (x' \cos m' - y' \cos l') &= fn \int_{x_0'}^{x'} dx' \int_{y_0'}^{y'} dy' . \psi \frac{d^2O}{dx'dy'} \left(x' \frac{dy_0'}{ds_0'} - y' \frac{dx_0'}{ds_0'} \right). \end{aligned} \right.$$

Alle diese Werthe (36) bis (43) für die Componenten des Druckes und der Reibung gelten nur für die Gleichungen (30) und (31) in Bezug auf die festen Coordinaten=Achsen; es ist aber nicht schwer, wenn sie für diese dargestellt sind, die den Gleichungen (32) und (33) oder den Gleichungen (34) und (35) entsprechenden Ausdrücke durch Vertauschung der Coordinaten abzuleiten.

Im Allgemeinen werden sich aber für die Anwendung jener Ausdrücke bedeutende Schwierigkeiten darbieten und namentlich wird die Integration derjenigen für die Componenten der Reibung nur in solchen Fällen möglich werden, wo die Richtung der Bewegung eines beliebigen Punktes der Berührungslinie oder Berührungsfläche bekannt ist. Auch setzt die Anwendung des Vorhergehenden nothwendig die Kenntniß des innern Zustandes des entsprechenden veränderlichen Systems voraus, weßhalb Beispiele dieser Art erst gegeben werden könnten, wenn wir diese innern Zustände für besondere veränderliche Systeme kennen gelernt haben, um so mehr als hier meistens die äußere Bewegung auch von einer innern Bewegung des Systems begleitet ist, und mit dieser in Zusammenhang steht.

In einigen einfachen Fällen und unter besondern Voraussetzungen über den innern Zustand des Systems lassen sich indessen die Untersuchungen mit hinreichender Allgemeinheit durchführen, wie wir sogleich an einigen Beispielen sehen werden.

§. 23.

Wir haben bereits in den §§. 177 und 178 des vorhergehenden Buches Bewegungen veränderlicher Systeme untersucht, und wollen nun den letztern dieser Fälle in folgender Fassung allgemeiner betrachten.

Zwei schwere parallelepipedische Körper A und B Fig. 3, welche sich auf zwei geneigte feste Ebenen stützen, sind durch einen gewichtlosen vollkommen biegsamen Faden von unveränderlicher Länge verbunden, der über eine sogenannte feste Rolle C, d. h. eine Rolle mit unbeweglicher horizontaler Drehungsachse geschlagen ist; es soll die Bewegung dieses Systems unter der Voraussetzung untersucht werden, daß die Durchschnittslinie der beiden Ebenen wagrecht und die Achse der Rolle zu dieser Durchschnittslinie parallel ist, daß die Schwerpunkte der beiden Körper A und B anfänglich in einer durch die Scheibe der Rolle gehenden zu ihrer Achse senkrechten Ebene liegen und entweder keine oder eine in dieser Ebene gerichtete anfängliche Geschwindigkeit besitzen, daß die Befestigungs=

punkte D und E des Fadens derselben Ebene angehören und von den festen Ebenen ebensoweit entfernt sind, wie die genannten Schwerpunkte, endlich daß auch die Reibung berücksichtigt wird, aber mit der Beschränkung, daß dieselbe den beiden Körpern keine drehende Bewegung zu ertheilen strebt, daß also die Resultirenden der Reibung in der vorhergenannten vertikalen Ebene liegen, welche die Schwerpunkte und den Faden enthält.

Die eben gemachten Voraussetzungen bezwecken, wie man leicht einsehen wird, die Bewegung der beiden Schwerpunkte auf die durch die Scheibe der Rolle gelegte vertikale Ebene zu beschränken; wir wollen also diese Ebene, die Ebene der Figur, als Ebene der xz annehmen, den Anfangspunkt O in den Durchschnitt der beiden Geraden AO und BO verlegen, welche durch die beiden Schwerpunkte A und B parallel zu den festen Ebenen MQ und NQ gezogen sind; die Achse der z sei parallel zur Richtung der Schwere und ihr dem Sinne nach entgegengesetzt, die positive Hälfte also aufwärts gerichtet. Wir können dann das System in den Körper A, die Rolle C und den Körper B zerlegen und die Gleichungen für diese einzelnen Theile aufstellen; die Bedingung, daß der Faden eine unveränderliche Länge besitzt, und daß die Reibung des Fadens auf dem Umfang der Rolle viel größer ist, als die des Zapfens der Rolle, daß also der Faden auf der Rolle nicht gleitet, wird die Verbindung dieser Gleichungen herstellen und zur Elimination der unbekannten Spannungen des Fadens, welche innere Kräfte des Systems sind, dienen. Seien also

P_1, P_2 die Gewichte der Körper A und B,

P_3 das Gewicht der Rolle C,

$2a_1$ die Länge der zu der Ebene der Figur parallelen Kanten des Körpers A, $2a_2$ die entsprechende Größe für B,

$2b_1$ und $2b_2$ die zu den festen Ebenen senkrechten Kanten derselben,

x_1, z_1 und x_2, z_2 die Coordinaten der Schwerpunkte von A und B,

$Mk^2 = \frac{P_3}{g} k^2$ das Massemoment der Rolle,

r der Halbmesser der Rinne, in welcher der Faden liegt,

ϱ der Halbmesser der Zapfen, auf welchen sie sich dreht,

a_3 und c_3 die Coordinaten des Achsendurchschnitts in der Ebene der Figur,

l die Länge des Fadens,

γ_1, γ_2 die Winkel, welche die Normalen zu den festen Ebenen mit der positiven Achse der z bilden,

J_1 die Spannung des Fadens zwischen dem Körper A und der Rolle,
J_2 die zwischen der Rolle und dem Körper B, endlich
f_1, f_2, f_3 die Reibungscoeffizienten für die Körper A und B und den Zapfen der Rolle.

Ersetzen wir dann noch den Druck N_1, welchen der Körper A auf die geneigte Ebene MQ ausübt, oder den Widerstand, welchen diese zu leisten hat, durch zwei parallele Componenten N_1' und N_1'', von denen die eine im untern, die andere im obern Endpunkte des in der Figur dargestellten Hauptschnittes angreift, ebenso den Widerstand N_2 der Ebene NQ gegen den Druck des Körpers B durch die entsprechenden Componenten N_2', N_2'', so erhalten wir für die im Sinne der negativen z und positiven x fortschreitende Bewegung des Körpers A die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1}{g}\frac{d^2 x_1}{dt^2} &= (N_1' + N_1'')(\sin\gamma_1 - f_1 \cos\gamma_1) + J_1 \cos\widehat{J_1 x} \\ \frac{P_1}{g}\frac{d^2 z_1}{dt^2} &= (N_1' + N_1'')(\cos\gamma_1 + f_1 \sin\gamma_1) + J_1 \sin\widehat{J_1 x} - P_1 \end{aligned}\right\} \text{(a.}$$

und die Bedingungen dafür, daß der Körper immer seiner ganzen Länge nach auf der Ebene MQ aufliegt, und demnach keine drehende Bewegung um den Schwerpunkt A in der Ebene der Figur stattfindet, sind

$$\left.\begin{aligned} z_1 \cos\gamma_1 + x_1 \sin\gamma_1 &= 0 \\ -(N_1' - N_1'')a_1 + f_1 (N_1' + N_1'')b_1 + J_1 a_1 \sin\widehat{J_1 O} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{(b.}$$

worin $\widehat{J_1 O}$ den Winkel zwischen der Richtung der Fadenspannung J_1 und der Geraden AO vorstellt.

Multiplizirt man dann die erste der Gleichungen (a) mit $\sin\gamma_1$, die zweite mit $\cos\gamma_1$ und nimmt ihre Summe, so erhält man zufolge der ersten Gleichung (b) und mit der Beachtung, daß $\widehat{J_1 O} = \pi - (\widehat{J_1 x} + \gamma)$ und

$$\sin\widehat{J_1 x}\cos\gamma + \cos\widehat{J_1 x}\sin\gamma = \sin\widehat{J_1 O}$$

ist, die Gleichung:

$$N_1' + N_1'' = P_1 \cos\gamma_1 - J_1 \sin\widehat{J_1 O}$$

und diese mit der zweiten Gleichung (b) verbunden, gibt den Ausdruck

$$N_1' - N_1'' = \frac{h_1}{a_1} f_1 P_1 \cos\gamma_1 + J_1 \sin\widehat{J_1 O}\left(1 - f_1 \frac{h_1}{a_1}\right),$$

aus welchen die Werthe folgen:

$$\left\{\begin{array}{l} N_1' = \frac{1}{2} P_1 \cos\gamma_1 \left(1 + f_1 \frac{h_1}{a_1}\right) - \frac{1}{2} f_1 \frac{h_1}{a_1} J_1 \sin\widehat{J_1 O}, \\ N_1'' = \frac{1}{2} P_1 \cos\gamma_1 \left(1 - f_1 \frac{h_1}{a_1}\right) - \frac{1}{2} J_1 \sin\widehat{J_1 O}\left(2 - f_1 \frac{h_1}{a_1}\right). \end{array}\right.$$

Der Körper A wird seiner ganzen Länge nach aufliegen, so lange N_1' und N_1'' noch positive Werthe haben, also so lange man hat

$$P_1 \cos\gamma_1 \left(1 + f_1 \frac{h_1}{a_1}\right) > f_1 \frac{h_1}{a_1} J_1 \sin\widehat{J_1 O}$$

und

$$P_1 \cos\gamma_1 \left(1 - f_1 \frac{h_1}{a_1}\right) > J_1 \sin\widehat{J_1 O}\left(2 - f_1 \frac{h_1}{a_1}\right).$$

Multiplicirt wir ferner die erste der Gleichungen (a) mit $\cos\gamma_1$, die zweite mit $\sin\gamma_1$ und nehmen ihre Differenz, so folgt mit der Beachtung, daß

$$\cos\widehat{J_1 x} \cos\gamma - \sin J_1 x \sin\gamma = -\cos\widehat{J_1 O}$$

ist, die Gleichung:

$$\frac{P_1}{g}\left(\frac{d^2 x_1}{dt^2}\cos\gamma_1 - \frac{d^2 z_1}{dt^2}\sin\gamma_1\right) = P_1 \sin\gamma - (N_1' + N_1'') f_1 - J_1 \cos\widehat{J_1 O};$$

man sieht aber leicht ein, daß $x_1 \cos\gamma - z_1 \sin\gamma$ die Entfernung des Schwerpunktes A von dem Anfangspunkte O ist; bezeichnen wir daher die Entfernung OD mit w_1, so daß

$$w_1 = x_1 \cos\gamma_1 - z_1 \sin\gamma_1 - a_1$$

wird, und ersetzen $N_1' + N_1''$ durch ihren obigen Werth, so nimmt die vorstehende Gleichung die Form an:

$$\text{c.)} \quad \frac{P_1}{g}\frac{d^2 w_1}{dt^2} = P_1 (\sin\gamma_1 - f_1 \cos\gamma_1) - J_1 (\cos\widehat{J_1 O} - f_1 \sin\widehat{J_1 O}).$$

Für die Bewegung des Körpers B erhalten wir unter der Voraussetzung, daß der Körper A der sinkende, B der steigende ist, daß also hier die Reibung zu Gunsten von P_2 wirkt, ebenso die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\frac{P_2}{g}\frac{d^2 x_2}{dt^2} &= J_2 \cos \widehat{J_2 x} - (N_2' + N_2'')(\sin\gamma_2 + f_2 \cos\gamma_2)\\ \frac{P_2}{g}\frac{d^2 z_2}{dt^2} &= J_2 \sin \widehat{J_2 x} + (N_2' + N_2'')(\cos\gamma_2 - f_2 \sin\gamma_2) - P_2\end{aligned}\right\}(a'.$$

und die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}z_2 \cos\gamma_2 - x_2 \sin\gamma_2 = 0\\ (N_2' - N_2'')\,a_2 + f_2 (N_2' + N_2'')\,b_2 - J_2\, a_2 \sin \widehat{J_2 O} = 0\end{aligned}\right\},\ (b'.$$

aus welchen sich in ähnlicher Weise wie vorher die Werthe ergeben:

$$\left.\begin{aligned}N_2' + N_2'' &= P_2 \cos\gamma_2 - J_2 \sin \widehat{J_2 O}\\ N_2' - N_2'' &= - f_2 \frac{b_2}{a_2} \cos\gamma_2 + J_2 \sin \widehat{J_2 O}\left(1 + \frac{b_2}{a_2} f_2\right)\end{aligned}\right\},$$

und sonach

$$\left.\begin{aligned}N_2' &= \frac{1}{2} P_2 \cos\gamma_2 \left(1 - f_2 \frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{1}{2} f_2 \frac{b_2}{a_2} J_2 \sin \widehat{J_2 O}\\ N_2'' &= \frac{1}{2} P_2 \cos\gamma_2 \left(1 + f_2 \frac{b_2}{a_2}\right) - \frac{1}{2} J_2 \sin \widehat{J_2 O}\left(2 + f_2 \frac{b_2}{a_2}\right)\end{aligned}\right\}.$$

Der Körper B wird seiner ganzen Länge nach auf NO aufliegen, wenn $N_2' > 0$ und $N_2'' > 0$ ist. Für die Entfernung $w_2 + a_2$ des Schwerpunktes B auf der NO von O hat man nun den Ausdruck:

$$x_2 \cos\gamma_2 + z_2 \sin\gamma_2$$

und zieht demnach aus den Gleichungen (a') mit dem Werthe von $N_2' + N_2''$ die neue Gleichung:

$$\frac{P_2}{g}\frac{d^2 w_2}{dt^2} = P_2 (\sin\gamma_2 + f_2 \cos\gamma_2) - J_2 (\cos \widehat{J_2 O} + f_2 \sin \widehat{J_2 O}) \quad . \ . \ (c'.$$

Die Rolle C besitzt keine fortschreitende Bewegung; bezeichnet man daher den Widerstand, welchen das Zapfenlager zu leisten hat, mit N_3, so ergeben sich mit der Beachtung, daß die Spannungen des Fadens an der Rolle den frühern an den Körpern A und B entgegengesetzt sind, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}0 &= - J_1 \sin \widehat{J_1 x} - J_2 \cos \widehat{J_2 x} + N_3 \cos \widehat{N_3 x} - f_3 N_3 \sin \widehat{N_3 x}\\ 0 &= - P_3 - J_1 \sin \widehat{J_1 x} - J_2 \sin \widehat{J_2 x} + N_3 \sin \widehat{N_3 x} + f_3 N_3 \cos \widehat{N_3 x}\end{aligned}\right\}$$

und zieht daraus den Werth (I. Bd. §. 29):

$$f_3 N_3 = \frac{f_3}{\sqrt{1+f_3^2}} S$$

worin S die Resultirende der Kräfte P_3, J_1 und J_2 vorstellt. Damit erhält man dann für die drehende Bewegung der Rolle, d. h. für das Aenderungsgesetz der Winkelgeschwindigkeit φ derselben die Gleichung:

$$M k^2 \frac{d\varphi}{dt} = (J_1 - J_2) r - f_3 N_3 \varrho$$

wenn man $\frac{f_3}{\sqrt{1+f_3^2}}$ durch f_4 ersetzt,

d.) $$M k^2 \frac{d\varphi}{dt} = (J_1 - J_2) r - f_4 S \varrho \, .$$

Um nun die Gleichungen (c), (c′) und (d) zu verbinden und die unbekannten Größen zu eliminiren, haben wir zuerst für die von C auf die AO gefällte Senkrechte $CJ = m_1$ den Werth:

$$m_1 = c_3 \cos\gamma_1 + a_3 \sin\gamma_1$$

und für den Abstand n_1 des Fußpunktes J derselben von O, nach der Verlängerung von AO positiv genommen

$$n_1 = c_3 \sin\gamma_1 - a_3 \cos\gamma_1 \, .$$

Damit folgt der Ausdruck für den Abstand CD und dann für die Länge l_1 des Fadens zwischen dem Befestigungspunkte D und dem Berührungspunkte J auf der Rolle

$$l_1 = \sqrt{(w_1 + n_1)^2 + m_1^2 - r^2} \, .$$

Ferner ergeben sich aus der Figur die Gleichungen:

e.) $$\left\{ \begin{array}{l} l_1 \sin \widehat{J_1 O} = m_1 + r_3 \cos \widehat{J_1 O} \\ l_1 \cos \widehat{J_1 O} = w_1 + n_1 - r_3 \sin \widehat{J_1 O} \end{array} \right.$$

und dann daraus die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} \sin \widehat{J_1 O} &= \frac{l_1 m_1 + r(w_1 + n_1)}{l_1^2 + r^2} \\ \cos \widehat{J_1 O} &= \frac{l_1(w_1 + n_1) - m_1 r}{l_1^2 + r^2} \end{aligned}\right\}$$

Auf gleiche Weise findet man für den senkrechten Abstand m_2 des Mittelpunktes C von der Geraden BO den Ausdruck:

$$m_2 = c_3 \cos \gamma_2 - a_3 \sin \gamma_2$$

und für die auf BO gemessene Entfernung n_2 von O den Werth:

$$n_2 = a_3 \cos \gamma_2 + c_3 \sin \gamma_2 .$$

Die Länge l_2 des Fadenstückes zwischen den Punkten E und G ist dann

$$l_2 = \sqrt{(w_2 + n_2)^2 + m_2^2 - r^2}$$

und für die Functionen $\sin \widehat{J_2 O}$ und $\cos \widehat{J_2 O}$ hat man die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \sin \widehat{J_2 O} &= \frac{l_2 m_2 + r(w_2 + n_2)}{l_2^2 + r^2} \\ \cos \widehat{J_2 O} &= \frac{l_2(w_2 + n_2) - m_2 r}{l_2^2 + r^2} \end{aligned}\right\}$$

Bezeichnet man dann noch den Mittelpunktswinkel, welcher dem vom Faden berührten Bogen der Rolle entspricht, mit ψ, so findet man leicht

$$\psi = \gamma_1 + \gamma_2 + \widehat{J_1 O} + \widehat{J_2 O} ;$$

die betreffende Fadenlänge l_3 ist daher

$$l_3 = r\psi = r(\gamma_1 + \gamma_2) + r(\widehat{J_1 O} + \widehat{J_2 O}) ,$$

und die Bedingung:

$$l = l_1 + l_2 + l_3$$

gibt eine Beziehung zwischen w_1 und w_2. Beachtet man ferner, daß wenn der Körper A sich fortbewegt, ein Punkt auf dem Umfange der Rolle einen Weg zurücklegt, welcher um den kleinen Bogen, um den der Berührungspunkt J zurückgeht, kleiner ist als die Aenderung der Fadenlänge l_1 und daß der jenem kleinen Bogen entsprechende Winkel der Aenderung des Winkels $\widehat{J_1 O}$ gleich ist, so findet man für eine Drehung der Rolle um den Winkel $\Delta\omega$ die Beziehung:

$$r\Delta\omega = \Delta l_1 - r\Delta.\widehat{J_1 O}.$$

und dadurch das Aenderungsgesetz in Bezug auf die Zeit

$$\text{g.)} \qquad r\frac{d\omega}{dt} = r\varphi = \left(\frac{dl_1}{dw_1} - r\frac{d.\widehat{J_1 O}}{dw_1}\right)\frac{dw_1}{dt}.$$

Die bisher abgeleiteten Gleichungen enthalten die zur Auflösung unserer Aufgabe nothwendigen Beziehungen; diese Beziehungen sind aber nicht einfach genug, um die Auflösung direct durchführen zu können, da die Schlußgleichung der Elimination zu verwickelt ist, als daß eine Integration derselben möglich wäre. Ich beschränke daher die Auflösung auf den einfacheren Fall, wo die Achse der Rolle eine solche Lage hat, daß die Fadenstücke DJ und EG zu den Ebenen MQ und NQ parallel, die Winkel $\widehat{J_1 O}$ und $\widehat{J_2 O}$ also Null sind und bleiben.

Die entsprechende Lage der Achse ergibt sich am einfachsten aus den Gleichungen (e) und den entsprechenden für $\widehat{J_2 O}$; man zieht nämlich daraus mit der vorhergenannten Bedingung

$$0 = m_1 + r \quad , \qquad 0 = m_2 + r \quad ,$$
$$l_1 = w_1 + n_1 \quad , \qquad l_2 = w_2 + n_2 \; ;$$

wenn dann für m_1 und m_2 ihre Werthe gesetzt werden, so erhält man für die Coordinaten a_3 und c_3 der Achse C der Rolle die Ausdrücke:

$$\left\{ \begin{aligned} a_3 &= -r\frac{\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} = -r\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}, \\ c_3 &= -r\frac{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} = -r\frac{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1-\gamma_2)}{\cos\frac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)}, \end{aligned} \right.$$

und diese geben für n_1 und n_2 denselben Werth:

$$n_1 = n_2 = -r\frac{1-\cos(\gamma_1+\gamma_2)}{\sin(\gamma_1+\gamma_2)} = -r\,tang\,\tfrac{1}{2}(\gamma_1+\gamma_2)$$

wie man es übrigens auch leicht der Figur 4 entnehmen wird, welche diesen besondern Fall darstellt.

Für diese Lage der Achse der Rolle werden unsere Gleichungen zur Bestimmung der Bewegung folgende:

$$\left.\begin{aligned} \frac{P_1}{g}\frac{d^2w_1}{dt^2} &= P_1(\sin\gamma_1 - f_1\cos\gamma_1) - J_1 \\ \frac{P_2}{g}\frac{d^2w_2}{dt^2} &= P_2(\sin\gamma_2 + f_2\cos\gamma_2) - J_2 \\ \frac{P_3}{g}k^2\frac{d\varphi}{dt} &= (J_1 - J_2)r - f_4 S\varrho \end{aligned}\right\}, \qquad (h.$$

und stehen durch die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} w_1 + n_1 + w_2 + n_2 + r(\gamma_1 + \gamma_2) &= l \\ r\frac{d\omega}{dt} = r\varphi &= \frac{dw_1}{dt} \end{aligned}\right\}, \qquad (i.$$

unter sich in Verbindung. Diese geben

$$\frac{d^2w_2}{dt^2} = -\frac{d^2w_1}{dt^2}, \qquad r\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d^2w_1}{dt^2},$$

und damit erhält man, wenn die dritte der Gleichungen (h) zu der Differenz der beiden ersten addirt wird:

$$\left.\begin{aligned} \left(P_1 + P_2 + P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{d^2w_1}{dt^2} &= gP_1(\sin\gamma_1 - f_1\cos\gamma_1) \\ &- gP_2(\sin\gamma_2 + f_2\cos\gamma_2) - f_4 gS\frac{\varrho}{r} \end{aligned}\right\} \qquad (k.$$

und für S hat man nun den Werth:

$$S = \sqrt{P_3^2 + J_1^2 + J_2^2 - 2J_1J_2\cos(\gamma_1+\gamma_2) + 2P_3J_1\sin\gamma_1 + 2P_3J_2\sin\gamma_2},$$

da $\widehat{J_1x} = \pi - \gamma_1$, $\widehat{J_2x} = \gamma_2$ wird. Bezeichnet man dann die Geschwindigkeit des Körpers A mit v_1, so daß man hat

$$v_1 = \frac{dw_1}{dt}, \qquad \frac{dv_1}{dt} = \frac{d^2w_1}{dt^2}$$

ersetzt zur Abkürzung die Größen $P_1(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1)$ und $P_2(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2)$ durch P' und P'', und führt für J_1 und J_2 deren Werthe aus den Gleichungen (h) in den Werth von S ein, so findet man folgende Gleichung:

$$1.)\left\{\begin{aligned} &\left[\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)^2-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r}[P_1{}^2+P_2{}^2+2P_1P_2\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\right]\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2\\ &-2g\left[(P'-P'')\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r}(P_1P_3\sin\gamma_1-P_2P_3\sin\gamma_2)\right.\\ &\qquad\left.-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}[P_1P'-P_2P''+(P_2P'-P_1P'')\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\right]\frac{dv_1}{dt}\\ &+g^2\left[(P'-P'')^2-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}[P'^2+P''^2-2P'P''\cos(\gamma_1+\gamma_2)]\right.\\ &\qquad\left.-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}(P_3{}^2+2P_3P'\sin\gamma_1+2P_3P''\sin\gamma_2)\right]=0, \end{aligned}\right.$$

welche nach $\frac{dv_1}{dt}$ aufgelöst, leicht nach t integrirt werden kann, und die Gleichungen einer gleichförmig veränderten Bewegung gibt. Man kann übrigens dieselbe, ohne der Genauigkeit sehr nahe zu treten, etwas vereinfachen, wenn sowohl der Reibungscoeffizient als das Verhältniß $\frac{\varrho}{r}$ des Zapfenhalbmessers zu dem Halbmesser der Rolle nicht größer als $\frac{1}{10}$ ist; denn es ist dann $f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}$ kleiner als 0,0001 und kann ohne merklichen Fehler gegen die Einheit vernachlässigt werden. Beachtet man also, daß man immer hat

$$P_1{}^2+P_2{}^2+2P_1P_2\cos(\gamma_1+\gamma_2)<\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)^2$$

$$P_1P'-P_2P''+(P_2P'-P_1P'')\cos(\gamma_1+\gamma_2)<(P'-P'')\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)$$

daß auch $P_1P_3\sin\gamma_1-P_2P_3\sin\gamma_2$ gegen den vorhergehenden Factor von 2g sehr klein ist und die beiden letzten eingeklammerten Glieder

$$P'^2+P''^2-2P'P''\cos(\gamma_1+\gamma_2)+P_3{}^2+2P_3P'\sin\gamma_1+2P_3P''\sin\gamma_2$$

das Quadrat der Resultirenden P_4 der Kräfte

$P'=P_1(\sin\gamma_1-f_1\cos\gamma_1)$, $P''=P_2(\sin\gamma_2+f_2\cos\gamma_2)$ und P_3

vorstellen, so kann man der Gleichung (1) die einfachere Form geben

$$\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)^2\left(\frac{dv_1}{dt}\right)^2-2g(P'-P'')\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{dv_1}{dt}$$

$$+g^2\left((P'-P'')^2-f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}P_4{}^2\right)=0$$

oder auch

$$\left[\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{dv_1}{dt}-g(P'-P'')\right]^2-g^2f_4{}^2\frac{\varrho^2}{r^2}P_4{}^2=0$$

und zieht daraus mit der Beachtung, daß nach der Voraussetzung die Reibung an der Rolle der Geschwindigkeit v_1 entgegenwirken muß, den Werth:

$$\left(P_1+P_2+P_3\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{dv_1}{dt}=g\left[(P'-P'')-f_4\frac{\varrho}{r}P_4\right],$$

welcher zeigt, daß die Beschleunigung c der Bewegung durch

$$c=g\frac{r^2(P'-P'')-f_4\varrho rP_4}{(P_1+P_2)r^2+P_3k^2}$$

ausgedrückt wird. Unserer Voraussetzung, daß der Körper A der sinkende sei, wird also entsprochen werden, wenn der Werth von c positiv ist, und die Bedingungen für die Voraussetzung, daß beide Körper auf ihren Ebenen aufliegen, werden einfach

$$N_1''>0 \quad \text{oder} \quad 1-f_1\frac{b_1}{a_1}>0,$$

$$N_2'>0 \quad \text{oder} \quad 1-f_2\frac{b_2}{a_2}>0.$$

Man wird nach diesem nun wieder leicht auf den im zweiten Buche (§. 178) behandelten Fall zurückgehen, für welchen man $\gamma_1=\gamma_2=\frac{1}{2}\pi$, also auch $P'=P_1$, $P''=P_2$ hat, und daher für P_4 den einfachen Werth $P_1+P_2+P_3$ erhält.

§. 24.

Die vorhergehende Aufgabe wollen wir nun noch dahin abändern, daß die beiden Körper A und B nicht mehr längs einer Ebene aufliegen, sondern von Umdrehungsflächen begrenzt werden, deren geometrische Achsen parallel zu der entsprechenden Ebene bleiben und schon am Anfang der Bewegung parallel zur Durchschnittslinie der festen Ebenen

gerichtet sind; ferner, daß der Faden unmittelbar an den beiden Enden dieser Achsen befestigt ist und die Körper sich ohne Reibung um ihre Achsen drehen können; die Lage der Rolle sei dabei wieder eine solche, daß jedes Fadenstück parallel zu der entsprechenden festen Ebene bleibt.

Unter dieser besondern Voraussetzung wollen wir, um die jetzige Untersuchung der frühern (am Ende des zweiten Buches) anzupassen, für den Körper A die Gerade OA Fig. 5 als Achse der x', und zwar die positive Hälfte von O nach A hinnehmen; für den Körper B ist die OB die negative Hälfte der Achse der x'', und γ_1 und γ_2 seien wieder die Winkel, welche die Achsen der z' und z'' mit der ursprünglichen Achse der z oder mit der Richtung der Schwere bilden. Ferner seien noch

$M_1 k_1^2 = \frac{P_1}{g} k_1^2$, $M_2 k_2^2 = \frac{P_2}{g} k_2^2$ und $M_3 k_3^2 = \frac{P_3}{g} k_3^2$ die Massemomente der Körper A und B und der Rolle C in Bezug auf ihre geometrischen Achsen,

r_1, r_2 die Halbmesser der größten Kreise der beiden Körper, also die, denen die Berührungspunkte angehören,

r_3 der Halbmesser der Rinne in der Rolle, in welcher der Faden liegt,

x_1' und x_2'' die Abscissen der Berührungspunkte D und E,

u_1 und u_2 die Geschwindigkeiten derselben auf den entsprechenden Ebenen, welche auch die gleitenden Geschwindigkeiten der Schwerpunkte A und B sind,

φ_1, φ_2 und φ_3 die Umdrehungsgeschwindigkeiten der Körper A und B und der Rolle C um ihre geometrischen Achsen im Sinne der Bewegung eines Uhrzeigers positiv genommen,

$w_1 = r_1 \varphi_1$, $w_2 = r_2 \varphi_2$ die wälzenden Geschwindigkeiten der Achsen A und B, endlich

v_1 und v_2 die zu den festen Ebenen parallelen fördernden Geschwindigkeiten dieser Achsen.

Wir haben dann nach §. 219 des zweiten Buches für die fortschreitende Bewegung des Berührungspunktes D die Gleichung:

$$\text{m.)} \quad \frac{P_1}{g} \frac{du_1}{dt} = P_1 (\sin \gamma_1 - f_1 \cos \gamma_1) - J_1 - \frac{P_1}{g} r_1 \frac{d\varphi_1}{dt},$$

für die des Berührungspunktes E dagegen die Gleichung:

$$\text{m'.)} \quad \frac{P_2}{g} \frac{du_2}{dt} = J_2 - P_2 (\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) - \frac{P_2}{g} r_2 \frac{d\varphi_2}{dt}.$$

Die augenblickliche drehende Bewegung des Körpers A um die zur geometrischen Achse parallele Achse des Berührungspunktes D wird durch die Gleichung:

$$\frac{P_1}{g}(k_1^2+r_1^2)\frac{d\varphi_1}{dt}=P_1 r_1 \sin\gamma_1 - J_1 r_1 - \frac{P_1}{g} r_1 \frac{du_1}{dt} \quad , \qquad (n.$$

die entsprechende Bewegung des Körpers B durch die Gleichung:

$$\frac{P_2}{g}(k_2^2+r_2^2)\frac{d\varphi_2}{dt}=J_2 r_2 - P_2 r_2 \sin\gamma_2 - \frac{P_2}{g} r_2 \frac{du_2}{dt} \qquad (n'.$$

ausgedrückt; für die drehende Bewegung der Rolle bleibt die dritte der Gleichungen (h) im vorigen Paragraphen, nämlich:

$$\frac{P_3}{g} k_3^2 \frac{d\varphi_3}{dt}=r_3(J_1-J_2)-f_4 S\varrho \ . \qquad (o.$$

Endlich hat man zur Verbindung dieser Gleichungen die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{c} \frac{dx_1'}{dt}-\frac{dx_2''}{dt}=v_1-v_2=0 \ , \\ \frac{dx_1'}{dt}=u_1+w_1=r_3\varphi_3 \quad , \qquad \frac{dx_2''}{dt}=u_2+w_2=\frac{dx_1'}{dt} , \\ \frac{du_1}{dt}+\frac{dw_1}{dt}=\frac{du_2}{dt}+\frac{dw_2}{dt} , \end{array}\right\} . (p.$$

Bei dieser Bewegung können nun vier Fälle stattfinden, entweder sind beide gleitende Geschwindigkeiten u_1 und u_2 Null, oder nur die eine oder die andere, oder es ist keine Null; bevor also die Untersuchung weiter fortgesetzt werden kann, müssen die Bedingungen für die Grenzen dieser vier Fälle festgestellt werden.

So lange weder u_1 noch u_2 Null sind und bis zur Grenze, wo sie Null werden, können sowohl die Gleichungen (m) und (n) als die Gleichungen (m′) und (n′) verbunden werden; eliminirt man also daraus die Aenderungsgesetze $\frac{du_1}{dt}$ und $\frac{du_2}{dt}$ um die Werthe von $\frac{dw_1}{dt}=r_1\frac{d\varphi_1}{dt}$ und $\frac{dw_2}{dt}=r_2\frac{d\varphi_2}{dt}$ zu bestimmen, so ergeben sich die Ausdrücke:

$$\begin{cases} \frac{P_1}{g} \frac{k_1^2}{r_1^2} \frac{dw_1}{dt} = f_1 P_1 \cos \gamma_1 \,, \\ \frac{P_2}{g} \frac{k_2^2}{r_2^2} \frac{dw_2}{dt} = f_2 P_2 \cos \gamma_2 \,, \end{cases}$$

welche nun in die aus (m) und (m') folgenden Bedingungsgleichungen:

$$\text{q.)} \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = 0 = P_1 \sin \gamma_1 - J_1 - \frac{P_1}{g} \frac{dw_1}{dt} - P_1 f_1 \cos \gamma_1 \,, \\ \frac{du_2}{dt} = 0 = J_2 - P_2 \sin \gamma_2 - \frac{P_2}{g} \frac{dw_2}{dt} - P_2 f_2 \cos \gamma_2 \,, \end{cases}$$

eingeführt, zur Bestimmung und zur Elimination von J_1 und J_2 dienen, und dadurch mittels der Gleichung der Bewegung zu den verlangten Bedingungsgleichungen führen. Man zieht damit aus den Bedingungen (q) die Werthe:

$$\begin{cases} J_1 = P_1 \left(\sin \gamma_1 - \frac{k_1^2 + r_1^2}{k_1^2} f_1 \cos \gamma_1 \right) \,, \\ J_2 = P_2 \left(\sin \gamma_2 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{k_2^2} f_2 \cos \gamma_2 \right) \,, \end{cases}$$

und erhält durch diese die neuen Bedingungen:

$$\text{r.)} \begin{cases} P_1 \sin \gamma_1 - J_1 \geqq \frac{k_1^2 + r_1^2}{k_1^2} P_1 f_1 \cos \gamma_1 \,, \\ J_2 - P_2 \sin \gamma_2 \geqq \frac{k_2^2 + r_2^2}{k_2^2} P_2 f_2 \cos \gamma_2 \,, \end{cases}$$

von denen die erste die gleitende Bewegung des Punktes D, die zweite die des Punktes E verbürgt; es müssen aber darin, um sie anwenden zu können, noch die Werthe von J_1 und J_2 mittels der Gleichung der Bewegung bestimmt werden.

Unter der gegenwärtigen Voraussetzung und mit Beachtung der Bedingungsgleichungen (p) gehen dazu die Gleichungen (m) und (m') über in

$$\text{s.)} \begin{cases} P_1 \frac{dw_1}{dt} = g P_1 (\sin \gamma_1 - f_1 \cos \gamma_1) - g J_1 \,, \\ P_2 \frac{dw_1}{dt} = g J_2 - g P_2 (\sin \gamma_2 + f_2 \cos \gamma_2) \,; \end{cases}$$

die Gleichung (o) wird

$$P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2} \frac{d v_1}{d t} = g(J_1 - J_2) - f_4 g S \frac{\varrho}{r_3}$$

worin S denselben Ausdruck vorstellt, wie im vorigen Paragraphen, nämlich die Resultirende von J_1, J_2 und P_3. Ersetzen wir daher wieder diese Resultirende wie oben durch die sehr wenig davon verschiedene Resultirende P_4 der Kräfte:

$$P_1(\sin\gamma_1 - f_1 \cos\gamma_1) = P' \quad , \quad P_2(\sin\gamma_2 + f_2 \cos\gamma_2) = P'' \text{ und } P_3$$

so finden wir durch Elimination von J_1 und J_2 dieselbe Gleichung wie am Ende des vorhergehenden Paragraphen, nämlich:

$$\left(P_1 + P_2 + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{d v_1}{d t} = g \left[P' - P'' - f_4 \frac{\varrho}{r_3} P_4\right]$$

für das Gesetz der Bewegung des Systems, und insbesondere des Körpers A. Man zieht daraus die constante Beschleunigung:

$$\frac{d v_1}{d t} = g \frac{P' - P'' - f_4 \frac{\varrho}{r_3} P_4}{P_1 + P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3},$$

und wenn dieselbe in die Gleichungen (s) unter der Form:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - J_1 &= \frac{P_1}{g} \frac{d v_1}{d t} + P_1 f_1 \cos\gamma_1 \\ J_2 - P_2 \sin\gamma_2 &= \frac{P_2}{g} \frac{d v_2}{d t} + P_2 f_2 \cos\gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

eingeführt wird und die sich ergebenden Ausdrücke mit den rechten Seiten der Bedingungen (r) verglichen werden, so gehen diese Bedingungen zuerst in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} P' - P'' - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 &\geqq \left(P_1 + P_2 + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{r_1^2}{k_1^2} f_1 \cos\gamma_1 \\ P' - P'' - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 &\geqq \left(P_1 + P_2 + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{r_2^2}{k_2^2} f_2 \cos\gamma_2 \end{aligned}\right\}$$

und werden dann durch weitere Entwickelung

$$\text{t.)}\left\{\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 &\geqq \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(P_1 \frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2} + P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_1 \cos\gamma_1 \\ &\quad + P_2 f_2 \cos\gamma_2 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 , \\ P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 &\geqq \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(P_1 + P_2 \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos\gamma_2 \\ &\quad + P_1 f_1 \cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 . \end{aligned}\right.$$

Diese Bedingungen werden dazu dienen, die kleinsten Werthe von f_1 und f_2 für gegebene Winkel γ_1 und γ_2, oder umgekehrt für gegebene Reibungscoeffizienten die kleinsten Werthe der Winkel γ_1 und γ_2 zu bestimmen, für welche noch eine gleitende Bewegung der Berührungspunkte D und E stattfinden kann. Man könnte daraus auch nur eine der vorhergehenden Größen und eines der beiden Gewichte P_1 oder P_2, oder die Werthe dieser beiden letztern ableiten, welche der vorgenannten Bedingung genügen, wenn die übrigen Größen als gegeben vorausgesetzt werden; wie aber leicht einzusehen ist, müßten in diesem Falle die Werthe von f_1, γ_1, f_2 und γ_2 wenigstens solche sein, daß jeder der beiden Körper allein noch gleiten könnte, und noch der Bedingung genügen, daß für $P_3 = 0$ und $f_4 = 0$, der Werth von $\frac{P_1}{P_2}$ aus beiden Bedingungen derselbe wäre.

Wenn eine der Bedingungen (t) nicht befriedigt wird, so tritt der zweite oder dritte Fall ein. Ist z. B.

$$\text{u.)}\left\{\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 &< \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(P_1 + \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos\gamma_2 \\ &\quad + P_1 f_1 \cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \end{aligned}\right.$$

so wird der Berührungspunkt E nicht mehr gleiten; man hat dann $v_2 = w_2 = v_1$, und die Gleichung (n′) gibt nun

$$P_2 \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} \frac{d v_1}{d t} = g\,(J_2 - P_2 \sin\gamma_2) .$$

Wird diese Gleichung wie früher mit der ersten der Gleichungen (s) und der Gleichung (o) durch Addition verbunden, so folgt nun der Ausdruck:

$$\left(P_1 + P_2 \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} + P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2}\right) \frac{dv_1}{dt} = g\left(P' - P_2 \sin\gamma_2 - f_4 \frac{\varrho}{r_3} P_4\right),$$

worin aber P_4 die Resultirende der Kräfte P', $P_2 \sin\gamma_2$ und P_3 vertritt, als Gleichung der Bewegung des Systems und die Beschleunigung:

$$\frac{dv_1}{dt} = g\,\frac{P_1(\sin\gamma_1 - f_1\cos\gamma_1) - P_2\sin\gamma_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4}{P_1 + \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3}.$$

Damit findet man weiter

$$\left.\begin{aligned} P_1\sin\gamma_1 - J_1 &= P_1\left[\frac{P' - P_2\sin\gamma_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4}{P_1 + \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3} + f_1\cos\gamma_1\right] \\ J_2 - P_2\sin\gamma_2 &= \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 \frac{P' - P_2\sin\gamma_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4}{P_1 + \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3}\end{aligned}\right\},$$

und bestimmt durch diese Werthe die Bedingungen für die Grenze der gleitenden Bewegung des Berührungspunktes D. Man hat für diese Grenze wie früher die ursprüngliche Bedingung:

$$P_1\sin\gamma_1 - J_1 \geqq \frac{k_1^2+r_1^2}{k_1^2} P_1 f_1\cos\gamma_1,$$

und diese geht nun mit dem vorhergehenden Werthe von $P_1 \sin\gamma_1 - J_1$ verglichen, in den Ausdruck:

$$P_1\sin\gamma_1 - P_2\sin\gamma_2 \geqq \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2} P_1 + \frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_1\cos\gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4$$

über, aus welchem f_1 unabhängig von f_2 bestimmt werden kann; immerhin ist aber diese Bedingung noch mit der Bedingung:

$$J_2 - P_2\sin\gamma_2 \leqq \frac{k_2^2+r_2^2}{k_2^2} P_2 f_2\cos\gamma_2$$

zu verbinden, welche mit dem oben gefundenen Werthe von $J_2 - P_2 \sin \gamma_2$ die Form erhält:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \sin \gamma_1 - P_2 \sin \gamma_2 < \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos \gamma_2 \\ \qquad + P_1 f_1 \cos \gamma_1 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \ , \end{array} \right.$$

welche, wie es sein muß, mit der Bedingung (u) gleichlautend ist, obwohl wegen der mangelhaften Genauigkeit der Werthe von $\frac{d v_1}{d t}$ der jetzige Werth von P_4 von dem in jenem Ausdrucke etwas abweicht.

Aus dem Vorhergehenden ist leicht zu schließen, daß die Bedingungen für den Fall, wo der Körper B gleitet, und A nur eine wälzende Bewegung besitzt, durch die Ungleichheiten:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_1 \sin \gamma_1 - P_2 \sin \gamma_2 < \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} P_1 + P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_1 \cos \gamma_1 \\ \qquad + P_2 f_2 \cos \gamma_2 + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \\ P_1 \sin \gamma_1 - P_2 \sin \gamma_2 \geqq \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(\frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} P_1 + \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} P_2 + \frac{k_3^2}{r_3^2} P_3\right) f_2 \cos \gamma_2 \\ \qquad + \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4 \end{array} \right.$$

gegeben sind, worin P_4 entsprechend in die Resultirende der Kräfte $P_1 \sin \gamma_1$, P'' und P_3 umzuändern ist.

In dem Falle endlich, wo beide Körper nur eine rollende Bewegung haben, zieht man aus den Gleichungen (n) und (n') mit der Beachtung, daß nun $w_1 = v_1$, $w_2 = v_2 = v_1$ wird,

$$\text{v.)} \quad \left\{ \begin{array}{l} P_1 \frac{k_1^2 + r_1^2}{r_1^2} \frac{d v_1}{d t} = g (P_1 \sin \gamma_1 - J_1) \ , \\ P_2 \frac{k_2^2 + r_2^2}{r_2^2} \frac{d v_1}{d t} = g (J_2 - P_2 \sin \gamma_2) \ . \end{array} \right.$$

Die Gleichung (o) wird immer wieder

$$P_3 \frac{k_3^2}{r_3^2} \frac{d v_1}{d t} = g (J_1 - J_2 - \frac{\varrho}{r_3} f_4 P_4) \ ;$$

wobei zu beachten ist, daß nun P_4 für die Resultirende der Kräfte $P_1 \sin\gamma_1$, $P_2 \sin\gamma_2$ und P_3 steht, und die Summe dieser Gleichungen gibt das Bewegungsgesetz:

$$\left(P_1 \frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}+P_2\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}+P_3\frac{k_3^2}{r_3^2}\right)\frac{dv_1}{dt}=g\left(P_1 \sin\gamma_1-P_2 \sin\gamma_2-\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4\right)$$

also die constante Beschleunigung:

$$\frac{dv_1}{dt}=g\,\frac{P_1 \sin\gamma_1-P_2 \sin\gamma_2-\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4}{P_1\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}+P_2\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}+P_3\frac{k_3^2}{r_3^2}}$$

Führen wir diesen Ausdruck in die Gleichungen (v) ein, um daraus die Werthe von $P_1 \sin\gamma_1 - J_1$ und $J_2 - P_2 \sin\gamma_2$ zu ziehen, und vergleichen wir dann diese Werthe mit den für unsern jetzigen Fall zusammenbestehenden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 \sin\gamma_1 - J_1 &< \frac{k_1^2+r_1^2}{k_1^2}P_1 f_1 \cos\gamma_1 \\ J_2 - P_2 \sin\gamma_2 &< \frac{k_2^2+r_2^2}{k_2^2}P_2 f_2 \cos\gamma_2 \end{aligned}\right\},$$

so nehmen diese die Formen an:

$$\left.\begin{aligned} P_1\sin\gamma_1-P_2\sin\gamma_2 &< \frac{r_1^2}{k_1^2}\left(\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}P_1+\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}P_2+\frac{k_3^2}{r_3^2}P_3\right)f_1\cos\gamma_1 \\ &\quad+\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4 \\ P_1\sin\gamma_1-P_2\sin\gamma_2 &< \frac{r_2^2}{k_2^2}\left(\frac{k_1^2+r_1^2}{r_1^2}P_1+\frac{k_2^2+r_2^2}{r_2^2}P_2+\frac{k_3^2}{r_3^2}P_3\right)f_2\cos\gamma_2 \\ &\quad+\frac{\varrho}{r_3}f_4P_4 \end{aligned}\right\} \text{(w.}$$

und geben die entsprechenden Grenzwerthe von f_1 und f_2 unabhängig von einander, diejenigen von zwei der übrigen Größen aber wieder durch ihre gegenseitige Verbindung. Es ist jedoch dabei zu beachten, daß zufolge unserer Annahme in Betreff der Richtung der Bewegung immer $P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2$ größer als Null sein muß.

Um von den vorhergehenden Ergebnissen eine einfache Anwendung zu machen, wollen wir annehmen, die beiden Körper A und B seien homogene Cylinder, so daß $\frac{r_1^2}{k_1^2} = \frac{r_2^2}{k_2^2} = 2$ ist; für die Rolle sei $\frac{r_3^2}{k_3^2}$ ebenfalls gleich 2 und der Coeffizient $\frac{\varrho}{r_3} f_4$ so klein, daß das damit behaftete Glied für eine erste Annäherung vernachlässigt werden kann; es sollen dann unter diesen Voraussetzungen die Werthe von f_1 und f_2, welche den verschiedenen Fällen Genüge leisten, und damit die den Grenzwerthen entsprechenden Beschleunigungen der Bewegung bestimmt werden.

Die Bedingungen (1) werden für die oben gemachten Annahmen zuerst

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \gtreqq (3P_1 + 2P_2 + P_3) f_1 \cos\gamma_1 + P_2 f_2 \cos\gamma_2$$

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \gtreqq (2P_1 + 3P_2 + P_3) f_2 \cos\gamma_2 + P_1 f_1 \cos\gamma_1$$

und geben dann für f_1 und f_2 die Werthe:

$$f_1 \leqq \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{(3P_1 + 3P_2 + P_3)\cos\gamma_1}, \quad f_2 \leqq \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{(3P_1 + 3P_2 + P_3)\cos\gamma_2}.$$

Die Grenzwerthe von f_1 und f_2 dürfen demnach im umgekehrten Verhältnisse der Functionen $\cos\gamma_1$ und $\cos\gamma_2$ stehen; für $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$ darf f_1, für $\gamma_2 = \frac{1}{2}\pi$ ebenso f_2 jeden beliebigen Werth erhalten, wie dieß von selbst einleuchtet; für $\gamma_2 = \frac{1}{2}\pi - \gamma_1$ hat man insbesondere

$$f_1 \lesseqgtr \frac{P_1 \tan\gamma_1 - P_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}, \quad f_2 \lesseqgtr f_1 \cot\gamma_1.$$

Wird $P_2 = P_1$ genommen und P_3 so klein, daß es gegen $6P_1$ vernachlässigt werden kann, so hat man

$$f_1 \leqq \tfrac{1}{6}(\tan\gamma_1 - 1).$$

Endlich ergibt sich für den Fall $P_2 = 0$, $P_3 = 0$, die früher (Buch II., §. 218) gefundene Bedingung wieder:

$$f_1 \leqq \tfrac{1}{3}\tan\gamma_1.$$

Führen wir nun die Grenzwerthe von f_1 und f_2 in den entsprechenden Werth von $\frac{dv_1}{dt}$ ein, so findet man, für beliebige Werthe von γ_1 und γ_2 den Ausdruck:

$$\frac{dv_1}{dt} = 2g\,\frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3} ,$$

welcher zeigt, daß es für den vorausgesetzten Sinn der Bewegung, wonach der Körper A der niedersinkende sein soll, genügt, wenn $P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 > 0$ ist. Für $P_2 = P_1$, $P_3 = 0$ und $\gamma_2 = \frac{1}{2}\pi - \gamma_1$ ist demnach $\frac{1}{4}\pi$ der kleinste Werth, welchen γ_1 erhalten darf, und dann müßte f_1 Null sein; nimmt man $\gamma_1 = \frac{1}{3}\pi$, $\tang\gamma_1 = \sqrt{3} = 1{,}732$, so würden die größten Werthe für f_1 und f_2

$$f_1 = 0{,}122 \quad , \quad f_2 = 0{,}07 .$$

Für den zweiten Fall, wenn der Körper B nur rollen nicht gleiten soll, werden unsere Bedingungen

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 \geqq (3P_1 + 3P_2 + P_3)\, f_1 \cos\gamma_1 ,$$

$$P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2 < (2P_1 + 3P_2 + P_3)\, f_2 \cos\gamma_2 + P_1 f_1 \cos\gamma_1 ;$$

und geben dieselben Grenzwerthe wie vorher, so daß man haben muß

$$f_1 \cos\gamma_1 \leqq \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3} ,$$

$$f_1 \cos\gamma_2 > \frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3} ;$$

für die diesen Grenzwerthen entsprechende Beschleunigung der Bewegung hat man aber den Ausdruck:

$$\frac{dv_1}{dt} = 2g\left(\frac{P_1 \sin\gamma_1}{3P_1 + 3P_2 + P_3} - \frac{P_2 \sin\gamma_2}{2P_1 + 3P_2 + P_3}\right) ;$$

es genügt daher jetzt nicht mehr, daß $P_1 \sin\gamma_1$ etwas größer, als $P_2 \sin\gamma_2$ wird; es muß nun

$$P_1 \sin\gamma_1 > P_2 \sin\gamma_2\,\frac{3P_1 + 3P_2 + P_3}{2P_1 + 3P_2 + P_3}$$

werden, wenn der Körper A sich abwärts bewegen soll.

Soll endlich der letzte Fall stattfinden, beiden Körpern also nur eine rollende Bewegung ertheilt werden, so muß zufolge der Bedingungen (w) sowohl $f_1 \cos\gamma_1$ als $f_2 \cos\gamma_2$ größer werden als $\frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}$;

die Beschleunigung wird unabhängig von der Reibung und zwar hat man für alle dieser Bedingung entsprechenden Werthe von f_1 und f_2 wieder den Ausdruck:

$$\frac{dv_1}{dt} = 2g\,\frac{P_1 \sin\gamma_1 - P_2 \sin\gamma_2}{3P_1 + 3P_2 + P_3}\,,$$

welcher in dem ersten Falle blos für die Grenzwerthe von f_1 und f_2 gültig ist.

Zuletzt wollen wir noch die bei der eben betrachteten Bewegung in Bezug auf die Winkel γ_1 und γ_2 stattfindenden Verhältnisse für die einfache Annahme untersuchen, daß $P_1 = P_2$, $f_1 = f_2$ und $P_3 = 0$ sei. Wir haben unter diesen Voraussetzungen für unsern ersten Fall die Bedingungen:

$$\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 \geqq 6f\cos\gamma_1\,,$$

$$\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 \geqq 6f\cos\gamma_2\,,$$

von denen die letzte allein genügt, weil $\cos\gamma_2$ immer größer sein muß, als $\cos\gamma_1$, weil also die erste Bedingung immer erfüllt wird, wenn der zweiten Genüge geleistet ist. Der größte Werth, den $\sin\gamma_1$ erhalten kann, ist 1; der größte Werth von γ_2 wird also durch die Bedingung:

$$\sin\gamma_2 + 6f\cos\gamma_2 \leqq 1$$

gegeben, aus welcher man sieht

$$\tan\gamma_2 \leqq \frac{1 - 36f^2}{12f}\,.$$

Der kleinste Werth von γ_2 ist indessen nicht gerade Null; es kann γ_2 auch negativ werden, die Ebene QN also von Q an gegen N hin steigen, und der kleinste Werth ist dann offenbar unter den jetzigen Voraussetzungen $\gamma_2 = -\gamma_1$, weil für einen größern negativen Werth der Körper B nicht nur ohne den Körper A fallen würde, sondern selbst schneller als dieser. Für den Fall $\gamma_2 = -\gamma_1$ wird unsere Bedingung

$$2\sin\gamma_1 \geqq 6f\cos\gamma_1\,,\qquad \tan\gamma_1 \geqq 3f\,,$$

wie es sein muß, weil nun beide Cylinder sich unabhängig auf gleiche Weise bewegen, wenn nicht der eine von ihnen eine andere anfängliche Geschwindigkeit erhalten hat, als der andere.

Die vorletzte Bedingungsgleichung gibt für $f = \frac{1}{6}$ als größten Werth $\gamma_2 = 0$, womit dann als entsprechender kleinster Werth $\sin\gamma_1 = 1$ folgt,

während der kleinste Werth von γ_1 überhaupt $\gamma_1 = arc\,tang\,\frac{1}{2} = 26^0\,34'$ ist, nämlich dann, wann $\gamma_2 = -\gamma_1$ gemacht wird. Soll daher γ_2 einen von Null verschiedenen positiven Werth erhalten, so muß f kleiner als $\frac{1}{6}$ werden. Für $f = \frac{1}{8}$ z. B. hat man schon $tang\,\gamma_2 = \frac{3}{4}$ und $\gamma_2 = 36^0 52'$ als größten Werth von γ_2 und als entsprechender kleinster Werth von γ_1 folgt natürlich wieder $\gamma_1 = \frac{1}{4}\pi$; nimmt man dagegen $\gamma_2 = 30^0$, so darf γ_1 nur $68^0 55'$ betragen, um unserer Bedingung zu genügen.

Sollen beide Körper rollen, so genügt offenbar die erste der beiden Bedingungen

$$\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 < 6\,f\cos\gamma_1 \quad , \quad \sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 < 6\,f\cos\gamma_2$$

und gibt den größten Werth, welchen γ_1 für ein gegebenes γ_2 erhalten darf; man erhält daraus

$$\sin\gamma_1 < \frac{\sin\gamma_2 + 6\,f\sqrt{\cos^2\gamma_2 + 36\,f^2}}{1 + 36\,f^2}$$

und da man immer auch $\sin\gamma_1 > \sin\gamma_2$ haben muß, so sind damit die Grenzen gegeben, zwischen welchen γ_1 liegen kann. Für $f = \frac{1}{6}$ hat man insbesondere

$$\sin\gamma_1 < \frac{1}{2}\left(\sin\gamma_2 + \sqrt{1 + \cos^2\gamma_2}\right)$$

also für $\gamma_2 = 0$

$$\sin\gamma_1 < \frac{1}{2}\sqrt{2} \quad , \quad \gamma_1 < \frac{1}{4}\pi \;;$$

für $\gamma_2 = \frac{1}{6}\pi$ dagegen hat man

$$\sin\gamma_1 < \frac{1}{4}\left(1 + \sqrt{7}\right) \quad , \quad \gamma_1 < 65^0\,42' \;,$$

und den größten Werth für γ_1 wird man erhalten, wenn man $\frac{d.\sin\gamma_1}{d\gamma_2} = 0$ setzt, also wenn $\gamma_2 = \frac{1}{4}\pi$ wird.

Für den Fall endlich, daß der Körper B nur rollen, A aber gleiten und rollen soll, haben wir die Bedingungen:

$$\sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 > 6\,f\cos\gamma_1 \quad , \quad \sin\gamma_1 - \sin\gamma_2 < 6\,f\cos\gamma_2$$

zu berücksichtigen. Die erste gibt nun

$$\sin\gamma_1 > \frac{\sin\gamma_2 + 6\,f\sqrt{\cos^2\gamma_2 + 36\,f^2}}{1 + 36\,f^2} \,,$$

und mit diesem Werthe wird die zweite

$$\cos\gamma_2(1+36f^2) > \sqrt{\cos^2\gamma_2+36f^2} - 6f\sin\gamma_2$$

oder nach den erforderlichen Reductionen

$$\operatorname{tang}\gamma_2 < -3f\ .$$

Es darf also γ_2 so klein werden, wie im ersten Falle, und wie dort noch den negativen Werth: $\operatorname{arc}\operatorname{tang} 3f$ erhalten; für γ_1 ergibt sich dann, wenn dieser Werth in die erste oder zweite der obigen Bedingungen unter der Form:

$$\sin\gamma_1 > \frac{\operatorname{tang}\gamma_2 + 6f\sqrt{1+36f^2(1+\operatorname{tang}^2\gamma_2)}}{(1+36f^2)\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma_2}}$$

und

$$\sin\gamma_1 < \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tang}^2\gamma_2}}(\operatorname{tang}\gamma_2+6f)$$

eingeführt wird, der Ausdruck:

$$\sin\gamma_1 \gtrless \frac{3f}{\sqrt{1+9f^2}}\quad,\quad \text{also } \operatorname{tang}\gamma_1 = 3f\ ,$$

wie dieß auch nach dem Vorhergehenden von selbst einleuchten wird. Für $\gamma_2 = 0$ dagegen hat man die beiden Grenzwerthe:

$$\sin\gamma_1 > \frac{6f}{\sqrt{1+36f^2}} \quad \text{und} \quad < 6f\ ,$$

und insbesondere für $f = \frac{1}{6}$

$$\sin\gamma_1 > \tfrac{1}{2}\sqrt{2} \quad \text{und} \quad < 1 \quad , \quad \gamma_1 > \tfrac{1}{4}\pi \quad , \quad < \tfrac{1}{2}\pi\ .$$

Der Winkel γ_2 selbst ist nur durch die Bedingung beschränkt

$$\sin\gamma_2 < \sin\gamma_1 - 6f\cos\gamma_1 \quad \text{oder} \quad < 1\ ,$$

und kann daher bis $\frac{1}{2}\pi$ wachsen. Für $\gamma_2 = \frac{1}{4}\pi$ und $f = \frac{1}{6}$ z. B. hat man

$$\sin \gamma_1 > \frac{\sqrt{3}+\sqrt{5}}{4} \text{ oder } > 0{,}992 \quad , \quad \sin \gamma_1 < \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}+1\right)$$

also liegt γ_1 zwischen 82° 45′ und 90°.

Aehnliche Schlüsse wie die bisherigen, lassen sich auch aus unsern allgemeinen Bedingungen ziehen; das Vorhergehende genügt indessen unserm Zwecke, dem Leser die hier stattfindenden Verhältnisse soweit klar zu machen, daß er die Untersuchung selbst weiter verfolgen kann.

§. 25.

In den vorhergehenden Aufgaben wurde der die Körper A und B verbindende Faden als gewichtslos vorausgesetzt, oder von so geringem Gewichte, daß dasselbe auf die Bewegung keinen bemerkbaren Einfluß hat; betrachten wir daher noch die Bewegung eines schweren, vollkommen biegsamen Fadens allein, wenn derselbe auf zwei geneigten Ebenen aufliegt und über eine Rolle geht, welche diese Ebenen in ihrer Verlängerung berührt, unter der Voraussetzung, daß der Faden auf der Rolle nicht gleitet und die Reibung auf den Ebenen berücksichtigt, die am Zapfen der Rolle dagegen vernachlässigt wird; in Betreff der Lage der Ebene und des Fadens und der Richtung der Rollenachse aber unter denselben Voraussetzungen wie vorher.

Sei wieder der Durchschnittspunkt O der Geraden MO und NO., Fig. 6, nach welchen die den Faden enthaltende vertikale Ebene der xz die festen Ebenen schneidet, der Anfang der Coordinaten, die Neigungen dieser Ebenen seien wie vorher durch die Winkel γ_1 und γ_2 bestimmt; $x_1 z_1$ seien die Coordinaten des abwärts sich bewegenden Endpunktes A, $x_2 z_2$ die des Punktes B, u_1 und u_2 die Abstände OA und OB dieser Punkte von O, v_1 und v_2 ihre Geschwindigkeiten in demselben Sinne genommen, so daß man hat $\frac{du_1}{dt} = v_1 = v_2 = -\frac{du_2}{dt}$; l sei die Länge des ganzen Fadens, p das Gewicht der Längeneinheit oder das constante geometrische Gewicht in einem beliebigen Punkte und f der für beide Ebenen geltende Reibungscoefficient, r der Halbmesser der Rolle und $\frac{P}{g}k^2$ das Massemoment derselben in Bezug auf ihre Achse, endlich a der Abstand der Berührungspunkte D und E von O, also $a = r \tang \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2)$.

Theilen wir nun den Faden in drei Theile und betrachten jeden dieser Theile, nämlich das auf der Ebene OM aufliegende Stück AD,

das auf der Ebene EN aufliegende Stück EB und das über der Rolle liegende DE für sich allein, indem wir wieder die noch unbekannten Spannungen J_1 und J_2 in den Punkten D und E einführen, so werden die Componenten X und Z der bewegenden Kraft für AD

$$X=0 \ , \quad Z=-p\int_a^{u_1} ds\,.\,s=-p(u_1-a) \ ,$$

für EB

$$X=0 \quad , \quad Z=-p(u_2-a) \ .$$

Ferner leuchtet ein, daß der für jedes der beiden ersten Stücke der geometrische Druck auf die entsprechende Ebene constant ist; bezeichnen wir denselben daher für den ersten Theil AD mit n_1, für den zweiten BE mit n_2, so geben die erste und letzte der Gleichungen (36) für AD die Werthe:

$$\begin{cases} \Sigma.N\cos\lambda=n_1\int_a^{u_1} ds\,.\cos(\tfrac{1}{2}\pi-\gamma_1)=n_1(u_1-a)\sin\gamma_1 \ , \\ \Sigma.N\cos\nu=n_1\int_a^{u_1} ds\,.\sin(\tfrac{1}{2}\pi-\gamma_1)=n_1(u_1-a)\cos\gamma_1 \ , \end{cases}$$

und für BE die Werthe:

$$\Sigma.N\cos\lambda=n_2(u_2-a)\cos(\tfrac{1}{2}\pi+\gamma_2)=-n_2(u_2-a)\sin\gamma_2 \ ,$$
$$\Sigma.N\cos\nu=n_2(u_2-a)\cos\gamma_2 \ .$$

Ebenso erhält man zufolge der Gleichungen (40) für die Componenten der Reibung an dem Stücke AD die Werthe:

$$\begin{cases} \Sigma.fN\cos l=fn_1\int_a^{u_1} ds\,.\cos(\pi-\gamma_1)=-fn_1(u_1-a)\cos\gamma_1 \ , \\ \Sigma.fN\cos n=fn_1\int_a^{u_1} ds\,.(u_1-a)\sin(\pi-\gamma_1)=fn_1(u_1-a)\sin\gamma_1 \ ; \end{cases}$$

für die Reibung an BE dagegen wird

$$\Sigma.fN\cos l=fn_2(u_2-a)\cos(\pi+\gamma_2)=-fn_2(u_2-a)\cos\gamma_2 \ ,$$
$$\Sigma.fN\cos n=fn_2(u_2-a)\sin(\pi+\gamma_2)=-fn_2(u_2-a)\sin\gamma_2 \ ,$$

Damit ergeben sich für die fortschreitende Bewegung dieser beiden Theile, und zwar für AD die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_1-a)}{g}\frac{d^2x_1}{dt^2} &= n_1(u_1-a)(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1) - J_1\cos\gamma_1 \\ \frac{p(u_1-a)}{g}\frac{d^2z_1}{dt^2} &= J_1\sin\gamma_1 + n_1(u_1-a)(\cos\gamma_1 + f\sin\gamma_1) - p(u_1-a) \end{aligned}\right\}$$

und für BD ebenso die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_2-a)}{g}\frac{d^2x_2}{dt^2} &= J_2\cos\gamma_2 - n_2(u_2-a)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) \\ \frac{p(u_2-a)}{g}\frac{d^2z_2}{dt^2} &= J_1\sin\gamma_1 + n_2(u_2-a)(\cos\gamma_2 - f\sin\gamma_2) - p(u_2-a) \end{aligned}\right\},$$

und diese führen mit den Bedingungsgleichungen:

$$z_1\cos\gamma_1 + x_1\sin\gamma_1 = 0 \quad , \qquad x_1\cos\gamma_1 - z_1\sin\gamma_1 = u_1 \; ,$$
$$z_2\cos\gamma_2 - x_2\sin\gamma_2 = 0 \quad , \qquad x_2\cos\gamma_2 + z_2\sin\gamma_2 = -u_2 \; ,$$

durch eine ähnliche Behandlung wie die der Gleichungen (a) und (a') in §. 23 zu folgenden Ausdrücken:

$$n_1 = p\cos\gamma_1 \quad , \qquad n_2 = p\cos\gamma_2$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_1-a)}{g}\frac{d^2u_1}{dt^2} &= p(u_1-a)\sin\gamma_1 - f n_1(u_1-a) - J_1 \\ \frac{p(u_2-a)}{g}\frac{d^2u_2}{dt^2} &= p(u_2-a)\sin\gamma_2 + f n_2(u_2-a) - J_2 \end{aligned}\right\},$$

oder nach erfolgter Elimination von n_1 und n_2

$$\left.\begin{aligned} \frac{p(u_1-a)}{g}\frac{d^2u_1}{dt^2} &= p(u_1-a)(\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1) - J_1 \\ -\frac{p(u_2-a)}{g}\frac{d^2u_2}{dt^2} &= -p(u_2-a)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) + J_2 \end{aligned}\right\}. \text{(a.}$$

Das über der Rolle liegende Fadenstück DE hat immer dieselbe Länge $r(\gamma_1+\gamma_2)$, also auch ein constantes Gewicht $pr(\gamma_1+\gamma_2)$,

und da es an der Drehung der Rolle Theil nimmt, so ist einmal sein Massemoment: $\frac{p}{g} r^3 (\gamma_1 + \gamma_2)$ dem der Rolle beizufügen. Dieses Fadenstück übt aber durch sein Gewicht auch eine drehende Wirkung aus, welche offenbar durch $p b r' \sin \frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)$ gemessen wird, wenn r' die Entfernung seines Schwerpunktes von der Achse der Rolle und b die Länge $r(\gamma_1 + \gamma_2)$ bezeichnet, und man beachtet, daß der zu diesem Schwerpunkte gezogene Halbmesser den Winkel $\frac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2)$ mit der Achse der z bildet. Man hat dann weiter (II. Buch, §. 27):

$$b r' = 2 r^2 \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) ,$$

also wird

$$p b r' \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) = 2 p r^2 \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 + \gamma_2) \sin \tfrac{1}{2} (\gamma_1 - \gamma_2) ,$$

wofür wir der Uebereinstimmung mit den vorhergehenden Ausdrücken wegen $p r^2 (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)$ setzen wollen. Für die drehende Bewegung der Rolle hat man demnach ohne Berücksichtigung der Zapfenreibung die Gleichung:

$$\text{b.)} \quad \frac{P k^2 + p r^3 (\gamma_1 + \gamma_2)}{g} \frac{d\varphi}{dt} = (J_1 - J_2) r + p r^2 (\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) .$$

Wir haben aber auch noch die weiteren Bedingungen: $u_1 + u_2 + r(\gamma_1 + \gamma_2) - 2a = l$, $r\varphi = v_1$, und diese führen, mit der Summe der Gleichungen (a) und (b) verbunden, zu der Schlußgleichung:

$$\text{c.)} \left\{ \begin{aligned} &\left(pl + P\frac{k^2}{r^2}\right) \frac{d^2 u_1}{dt^2} = pg(u_1 - a) \left(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 + f(\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)\right) \\ &\quad + pgr(\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1) - pg(l - b)(\sin \gamma_2 + f \cos \gamma_2) , \end{aligned} \right.$$

worin zur Abkürzung b statt $r(\gamma_1 + \gamma_2)$ gesetzt ist, und welche zur weitern Behandlung unter die Form:

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \beta^2 w$$

gebracht werden kann, wenn man β^2 für

$$\frac{p g r^2}{g l r^2 + P k^2} \left(\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 + f(\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)\right)$$

und dann noch w für

$$u_1 - a - \frac{(l - b)(\sin \gamma_2 + f \cos \gamma_2) - r(\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)}{\sin \gamma_1 + \sin \gamma_2 + f(\cos \gamma_2 - \cos \gamma_1)}$$

einführt. Das unbestimmte Integral dieser Gleichung hat daher (I. B. §. 83) die Form:

$$\Delta w = A e^{\beta t} + B e^{-\beta t}$$

worin A und B nach den anfänglichen Zuständen des Systems zu bestimmen sind; man hat dazu mit dem Werthe von w die beiden Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a + \dfrac{(l-b)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) - r(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2 + f(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)} + A e^{\beta t} + B e^{-\beta t} \\ \dfrac{du_1}{dt} = v_1 = A\beta e^{\beta t} - B\beta e^{-\beta t} \end{array}\right\}, (d.$$

also für $t = 0$, und wenn $u_1^{(0)}$ und $v_1^{(0)}$ die anfänglichen Werthe von u_1 und v_1 sind,

$$\left.\begin{array}{l} u_1^{(0)} = A + B + a + \dfrac{(l-b)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) - r(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2 + f(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)} \\ v_1^{(0)} = \beta(A - B) \end{array}\right\}. (e.$$

Aus diesen Gleichungen schließen wir zuerst, daß wenn v_1 fortwährend Null, der Faden also ohne anfängliche Geschwindigkeit im Gleichgewichte bleiben soll, A und B Null werden müssen; die zweite der Bedingungen (e) gibt dann $A = B$, und damit zieht man aus der ersten,

$$A = \frac{1}{2}\left[u_1^{(0)} - a - \frac{(l-b)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) - r(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2 + f(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}\right];$$

die Bedingung $A = B = 0$ wird also erfüllt, wenn man hat:

$$u_1^{(0)} = a + \frac{(l-b)(\sin\gamma_2 + f\cos\gamma_2) - r(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}{\sin\gamma_1 + \sin\gamma_2 + f(\cos\gamma_2 - \cos\gamma_1)}$$

Nehmen wir z. B. den einfachen Fall, wo $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma_2 = 0$ ist, wo demnach das eine Fadenstück AD lothrecht herabhängt, das andere BE auf einer horizontalen Ebene liegt, so wird ohne anfängliche Geschwindigkeit so lange Gleichgewicht stattfinden, als das anfänglich herabhängende Stück nicht länger ist als $(r + l - \frac{1}{2}\pi r)\dfrac{f}{1+f}$, da für diesen Fall $a = r \, tang \, \frac{1}{2}\pi = r$, $b = \frac{1}{2}\pi r$ wird. Ist $u_1^{(0)}$ größer als

dieser Werth, z. B. $u_1^{(0)} = \frac{f}{1+f}\left[l + \frac{1}{2} r (4-\pi)\right]$ so tritt auch ohne anfängliche Geschwindigkeit Bewegung ein, und man hat

$$\beta^2 = (1+f)\frac{p g r^2}{p l r^2 + P k^2} \quad , \quad A = B = \frac{f r}{2(1+f)} ;$$

die Gleichungen der Bewegung werden demnach

$$u_1 = \frac{f r}{2(1+f)}\left(e^{\beta, t} + e^{-\beta, t}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{f r \beta,}{2(1+f)}\left(e^{\beta, t} - e^{-\beta, t}\right) ,$$

worin $\beta,$ den vorstehenden besondern Werth von β bedeutet.

Wenn $\gamma_2 = \gamma_1 = \gamma$ ist, so wird die Gleichung (c) einfacher

$$\left(p l + P\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{d^2 u_1}{d t^2} = 2 p g (u_1 - a) - p g (l - b)(\sin\gamma + f\cos\gamma) ;$$

man hat $a = r\,tang\,\gamma$, $b = 2\gamma r$, $\beta^2 = \frac{2 p g r^2 \sin\gamma}{p l r^2 + P k^2}$, und der der Gleichgewichtslage entsprechende Werth von $u_1^{(0)}$ ist

$$u_1^{(0)} = r\,tang\,\gamma + \tfrac{1}{2}(l - 2\gamma r)(1 + f\cot\gamma) .$$

Setzt man in diesem Falle $\gamma = \frac{1}{2}\pi$, so wird der letztere Werth unendlich, weil nun der Anfangspunkt O in's Unendliche rückt; man kann dann aber diesen Anfangspunkt in die Achse der Rolle verlegen, und $u_1 - a = u'$ setzen; man findet dann den Werth:

$$u'^{(0)} = \tfrac{1}{2}(l - \pi r) ,$$

dessen Richtigkeit von selbst einleuchten wird.

Nehmen wir noch $\gamma_2 = -\gamma_1$, und lassen demnach die Ebene NO in die Verlängerung von MO fallen, so geht die Gleichung (c), wie dies sein muß, in

$$\left(p l + P\frac{k^2}{r^2}\right)\frac{d^2 u_1}{d t^2} = p g l (\sin\gamma_1 - f\cos\gamma_1) ,$$

über, da sowohl der Factor von $u_1 - a$ und $p g r$ als b Null wird; der Coeffizient von $\frac{d_2 u_1}{d t^2}$ behält aber noch das Glied $P\frac{k^2}{r^2}$, weil nach unserer Voraussetzung der Faden immer noch die Rolle berührt und diese mitbewegt.

Die Folgerungen, welche sich aus unsern Gleichungen für den Fall ergeben, wo keine Reibung des Fadens auf den Ebenen berücksichtigt, f also Null wird, mögen dem Leser überlassen bleiben; und es soll nur bemerkt werden, daß man aus dem obigen Werthe von u_1 in Function von t für die besondere Annahme $\gamma_2 = 0$, $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$ nicht schließen darf, daß für die genannte Voraussetzung u_1 immer Null sei, weil in diesem Falle $u_1^{(0)}$ größer als Null genommen werden muß, wenn ohne anfängliche Geschwindigkeit Bewegung eintreten soll, und man daher nicht

$$u_1^{(0)} = \frac{f}{1+f}\left[1 + \tfrac{1}{2} r (4 - \pi)\right]$$

nehmen darf, was für $f = 0$ wieder auf Null zurückkommt.

§. 26.

Wir haben oben bei der Betrachtung des äußern Gleichgewichtes (§. 9) auf die fortschaffenden Maschinen hingewiesen und wollen daher nun die Bewegung eines ähnlichen Systems untersuchen, soweit dieß angeht, ohne das Gebiet der technischen Mechanik zu betreten; die betreffende Aufgabe werde demnach in folgende Weise gefaßt.

Zwei parallelepipedische Körper, von denen jeder auf zwei Paar je zwei gleicher cylindrischer Räder ruht, sind unter sich durch einen Faden verbunden, und stützen sich mittels jener Räder auf eine geneigte Ebene; in dem ersten derselben ist eine constante Kraft vorhanden, welche drehend auf ein Räderpaar wirkt; es soll die Bewegung dieses Systems mit Berücksichtigung der Reibung und unter der Voraussetzung untersucht werden, daß je zwei Räder die Achse gemeinschaftlich haben und alle Achsen parallel und immer horizontal gerichtet sind, daß der die beiden Körper verbindende Faden parallel zu der geneigten Ebene ist und mit den Schwerpunkten der beiden Körper in einer Vertikalebene liegt, welche zu den Räder-Achsen senkrecht ist und den Abstand zwischen je zwei Rädern halbirt.

Nach diesen Voraussetzungen wird es für unsere Betrachtung genügen, wenn wir die beiden Körper durch ihre Durchschnitte mit der zuletzt genannten Vertikalebene, der Ebene der Figur 7, und jedes Räder-Paar durch ein einziges in dieser Ebene liegendes ersetzen, dessen Gewicht dem Gewichte beider gleich ist. Jene Ebene nehmen wir als Ebene der xz, den Durchschnitt OM derselben mit der geneigten Ebene als Achse der x und irgend einen Punkt O in ihr als Anfang der Coordinaten, und von da sollen die positiven x aufwärts gerichtet sein, wenn

das System sich aufwärts bewegt und die drehende Bewegung der Räder im positiven Sinne vor sich geht. Seien dann

γ der Neigungswinkel der Ebene OM gegen den Horizont,

Q_1, Q_2 die Gewichte der Körper A und B,

P_1, R_1 und $\frac{P_1}{g} k_1^2$ das Gewicht, der Halbmesser und das in Bezug auf die Achse genommene Massemoment des Räderpaares a, welches durch die innere Kraft J umgedreht wird,

P_2 und $\frac{P_2}{g} k_2^2$ das Gewicht und Massemoment eines der Räder-Paare b, c und d,

R_2 der Halbmesser eines dieser Räder,

r der Halbmesser des Kreises, an welchem die innere Kraft J tangential und parallel zu OM angreifen soll,

ϱ_1 der Halbmesser der Achsen der Räder a,

ϱ_2 derjenige der Achsen der übrigen Räder,

f_1 und f_2 die Reibungscoeffizienten für die geneigte Ebene und die Achsen der Räder,

T die Spannung des Fadens, welcher die Körper A und B verbindet,

N_1 der Druck der Räder a auf die feste Ebene,

N', N'' und N''' der resultirende Druck auf die Achsen der Räder-Paare a, b und c und d, indem wir denselben für die beiden letztern als gleich voraussetzen, endlich

ψ_1, ψ_2, ψ_3 die Winkel, welche die Richtungen dieser Kräfte, als Widerstände der mit den Rädern fest verbundenen Achsen betrachtet, mit der Achse der positiven x bilden.

Untersuchen wir nun zuerst die Bewegung des Triebrades a und zwar in Bezug auf den Berührungspunkt D, so haben wir an demselben außer seinem Gewichte folgende Kräfte in Betracht zu ziehen: 1) die Triebkraft J, von welcher wir vorerst annehmen wollen, daß sie oberhalb der Achse a angreift, wie schon bemerkt, fortwährend parallel zu OM, und daher im Sinne der positiven x gerichtet ist; 2) der senkrecht zur Ebene OM im Sinne der positiven z gerichtete Widerstand N_1, welchen diese Ebene dem Druck des Rades a entgegenzusetzen hat; 3) die im Sinne der positiven x gerichtete Reibung $f_1 N_1$ am Berührungspunkte D; 4) der Druck N', welchen die Achse des Rades durch ihr Lager erleidet und welcher hier als Druck auf die Achse genommen werden muß, also den Winkel $\pi - \psi_1$ mit der positiven Achse bildet;

endlich 5) die Zapfenreibung $f_2 N'$, für welche man zu beachten hat, daß sie am Rad angreift und mit der positiven Achse der x den Winkel $\psi_1 + \frac{1}{2}\pi$ einschließt. Die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Berührungspunktes D werden daher, wenn u_1 die im Sinne der positiven x positive gleitende Geschwindigkeit dieses Punktes, und φ_1 die Winkelgeschwindigkeit der drehenden Bewegung des Rades bezeichnet (II. Buch, §. 219),

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{g}\frac{d u_1}{d t} = J + f_1 N_1 - N' \cos\psi_1 - f_2 N' \sin\psi_1 - P_1 \sin\gamma - \frac{P_1}{g} R_1 \frac{d\varphi_1}{d t} \\ \qquad 0 = N_1 - N' \sin\psi_1 + f_2 N' \cos\psi_1 - P_1 \cos\gamma \end{array}\right\} ; \quad (a.$$

für die drehende Bewegung um den Berührungspunkt haben wir dann die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{P_1}{g}(k_1^2 + R_1^2)\frac{d\varphi_1}{d t} = J(R_1 + r) - N' R_1 \cos\psi_1 \\ \qquad - \frac{P_1}{g} R_1 \frac{d u_1}{d t} - P_1 R_1 \sin\gamma - f_2 N' (R_1 \sin\psi_1 + \varrho_1) \end{array}\right\}, \quad (b.$$

und diese mit der ersten der Gleichungen (a) verbunden, gibt durch Elimination von $\frac{d u_1}{d t}$ den Werth von $\frac{d\varphi_1}{d t}$, welcher für eine stattfindende gleitende Bewegung des Berührungspunktes D, und daher auch noch für die Grenze, wo diese gleitende Bewegung aufhört, gültig ist, welcher sich aber auch unmittelbar und selbst einfacher dadurch ableiten läßt, daß man die drehende Bewegung des Rades in Bezug auf seine geometrische Achse ausdrückt; man findet auf beiden Wegen

$$\frac{P_1}{g} k_1^2 \frac{d\varphi}{d t} = J r - f_1 N_1 R_1 - f_2 N' \varrho_1 ,$$

und zieht damit aus der Gleichung (a) die Bedingung:

$$f_1 N_1 \frac{k_1^2 + R_1^2}{k_1^2} > N' \cos\psi_1 + P_1 \sin\gamma - J\left(1 - \frac{R_1 r}{k_1^2}\right) + f_2 N'\left(\sin\psi_1 - \frac{R_1 \varrho_1}{k_1^2}\right)$$

oder wenn der Werth von N_1 aus der zweiten Gleichung (a) eingeführt wird,

zurückkommt, worin die Größen m_3, n_3, m_4 und n_4 ähnliche Bedeutungen haben, wie die m_1, n_1, m_2 und n_2 bei dem Körper A, und welcher durch die Lage des Schwerpunktes Genüge geleistet werden muß, wenn unsere Annahme, daß der Druck auf die Achsen der Räderpaare c und d gleich und gleich gerichtet sei gültig sein soll. Man hat aber in unserm Falle, wo die Halbmesser der Räder gleich sind, $n_3 = n_4$; macht man also noch $m_3 = m_4$, so daß der Schwerpunkt in die Mitte zwischen die beiden Achsen fällt, so wird die vorhergehende Bedingung einfacher

$$\text{l.)} \qquad f_2 \varrho_2 = n_3 (\cos \psi_3 + f_2 \sin \psi_3) ,$$

und gibt die erforderliche Größe von n_3, wenn ψ_3 bekannt ist.

Verbinden wir nun die Gleichungen (k) mit der Gleichung (g), so ergibt sich aus der Summe der doppelten letztern und der ersten von jenen, für die Bewegung des Körpers B mit seinen Rädern die Gleichung:

$$\text{m.)} \quad (Q_2 + 2\beta P_2)\frac{dv}{dt} = g\left[T - (Q_2 + 2P_2)\sin\gamma - 2fN''' \frac{\varrho_2}{R_2}\right] ,$$

worin der Factor $1 + \frac{k_2^2}{R_2^2}$, welchen wir für alle Räder gleich annehmen wollen, durch β ersetzt ist. Multiplizirt wir dann die Gleichung (g) mit f_2, die zweite der Gleichungen k mit g und ziehen beide von einander ab, so finden wir mit Vernachlässigung der mit f_2^2 behafteten Glieder und wenn wir $\frac{dv}{dt}$ zur Abkürzung durch v′ ersetzen

$$N''' \sin \psi_3 = \frac{1}{2} Q_2 \cos \gamma - f_2 P_2 \left(\sin \gamma + \beta \frac{v'}{g}\right) .$$

Multiplizirt man dann die zweite Gleichung (k) mit $g f_2$ und addirt sie zu (g), so folgt mit gleicher Annäherung

$$N''' \cos \psi_3 = - \left[P_2 \left(\sin \gamma + \beta \frac{v'}{g}\right) + \frac{1}{2} f_2 Q_2 \cos \gamma\right] ,$$

da $f_2 \frac{\varrho_2}{R^2}$ derselben Ordnung angehört wie f_2^2. Man zieht aus diesen Werthen leicht den für $\tang \psi_3$, welcher zeigen wird, daß wenn das Gewicht P_2 gegen Q_2 ziemlich klein ist, die Ebene dabei eine geringe Steigung hat und die Beschleunigung v′ nicht sehr bedeutend ist, ψ_3

wenig größer sein wird, als $\frac{1}{2}\pi$, und erhält durch die Summe ihrer Quadrate, wenn wieder f_2^2 neben 1 vernachlässigt wird

$$N''' = \sqrt{\frac{1}{4} Q_2^2 \cos^2\gamma + P_2^2 \left(\sin\gamma + \beta \frac{v'}{g}\right)^2},$$

wofür wir unter den ebengenannten Voraussetzungen

$$N''' = \frac{1}{2} Q_2 \cos\gamma \left(1 + \frac{2 P_2^2 \left(\sin\gamma + \beta \frac{v'}{g}\right)^2}{Q_2^2 \cos^2\gamma}\right)$$

setzen wollen; als eine erste Annäherung wird selbst der Werth:

$$N''' = \tfrac{1}{2} Q_2 \cos\gamma$$

genügen, da diese Größe nur mit dem kleinen Factor $f_2 \frac{\varrho_2}{R_2}$ multiplizirt in der Gleichung der Bewegung erscheint.

Nachdem auf diese Weise N''' der Größe und Richtung nach bestimmt worden, verbinden wir die Gleichung (m) mit der ersten der Gleichungen (h) und der Gleichung (f) und erhalten als Summe derselben

$$\left.\begin{aligned}(Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2)\frac{dv}{dt} &= g\left[N'(\cos\psi_1 + f_2 \sin\psi_1) - J\right] \\ &\quad - g\left[(Q_1 + Q_2 + 3P_2)\sin\gamma + (N'' + 2N''') f_2 \frac{\varrho_2}{R_2}\right]\end{aligned}\right\}, \quad (n.$$

und diese Gleichung mit der zweiten der Gleichungen (h), mit (g) und (i) verbunden, wird dazu dienen, die vier Größen $N' \sin\psi_1$, $N' \cos\psi_1$, $N'' \sin\psi_2$ und $N'' \cos\psi_2$ zu bestimmen, woraus sich dann die N' und N'' wieder der Größe und Richtung nach berechnen lassen. Dazu bringt man die Gleichung (i) auf die Form:

$$\left.\begin{aligned}N' n_1 (\cos\psi_1 + f_2 \sin\psi_1) + N' m_1 (\sin\psi_1 - f_2 \cos\psi_1) - f_2 N' \varrho_1 \\ = N'' m_2 (\sin\psi_2 - f_2 \cos\psi_2) - N'' n_2 (\cos\psi_2 + f_2 \sin\psi_2) + f_2 N'' \varrho_2\end{aligned}\right\} (o.$$

und ersetzt die beiden ersten Glieder durch ihre Werthe aus den Gleichungen (n) und (h); man erhält dadurch den Ausdruck:

$$\left\{\begin{aligned} n_1\Big[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J+f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N''+2N''')\Big] \\ +m_1 Q_1\cos\gamma = N''(\sin\psi_2-f_2\cos\psi_2)(m_1+m_2)+f_2 N'\varrho_1 \\ -N''n_2(\cos\psi_2+f_2\sin\psi_2)+f_2 N''\varrho_2\,, \end{aligned}\right.$$

und dieser nimmt, wenn darin noch $N''(\cos\psi_2+f_2\sin\psi_2)$ aus der Gleichung (f) ersetzt wird und man beachtet, daß die Verhältnisse $\frac{\varrho_1}{m_1+m_2}$, $\frac{\varrho_2}{m_1+m_2}$ derselben Ordnung angehören, wie $\frac{\varrho_1}{R_1}$, $\frac{\varrho_2}{R_2}$, daß also die Glieder $f_2 N'\varrho_1$ und $f_2 N''\varrho_2$ ebenso wie $f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N''+2N)''$ neben den übrigen vernachlässigt werden dürfen, die Form an:

$$p.)\left\{\begin{aligned} N''(\sin\psi_2-f_2\cos\psi_2)(m_1+m_2)=m_1 Q_1\cos\gamma+n_2 P_2\Big(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\Big) \\ +n_1\Big[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J\Big]\,. \end{aligned}\right.$$

Dieser Ausdruck wird nochmals durch Addition mit der Gleichung (f) verbunden unter der Form:

$$N''(f_2\cos\psi_2+f_2^2\sin\psi_2)(m_1+m_2)=f_2 P_2\Big(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\Big)(m_1+m_2)$$

und gibt so den angenäherten Werth:

$$\left\{\begin{aligned} N''\sin\psi_2=\frac{m_1}{m_1+m_2}Q_1\cos\gamma+P_2\Big(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\Big)\Big(f_2+\frac{n_2}{m_1+m_2}\Big) \\ +\frac{n_1}{m_1+m_2}\Big[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J\Big]\,. \end{aligned}\right.$$

Multiplizirt man dagegen die Gleichung (p) mit f_2 und zieht sie von der mit m_1+m_2 multiplizirten Gleichung (f) ab, so findet man

$$\left\{\begin{aligned} N''\cos\psi_2=P_2\Big(\sin\gamma+\beta\frac{v'}{g}\Big)\Big(1-\frac{f_2 n_2}{m_1+m_2}\Big)-\frac{f_2 m_1}{m_1+m_2}Q_1\cos\gamma \\ -\frac{f_2 n_1}{m_1+m_2}\Big((Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma+(Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g}+J\Big)\,. \end{aligned}\right.$$

Eliminirt man auf gleiche Weise aus der Gleichung (o) die Glieder: $N''(\sin\psi_2 - f_2\cos\psi_2)$ und $N''(\cos\psi_2 + f_2\sin\psi_2)$ mittels der Gleichungen (h) und (f), so ergibt sich mit den frühern Vernachlässigungen die Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} N' n_1(\cos\psi_1 + f_2\sin\psi_1) + N'(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)(m_1+m_2) \\ = m_2 Q_1\cos\gamma - n_2 P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \end{aligned}\right\};$$

diese mit der Gleichung (n) unter der Form:

$$N'(\cos\psi_1 + f_2\sin\psi_1) = \left((Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right)$$

verbunden, führt zu der neuen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} N'(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)(m_1+m_2) = m_2 Q_1\cos\gamma - n_2 P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \\ - n_1\left((Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right) \end{aligned}\right\},$$

und aus diesen und den vorhergehenden folgen wie vorher die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} N'\sin\psi_1 &= \frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1\cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \\ &+ \left(f_2 - \frac{n_1}{m_1+m_2}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right], (p) \\ N'\cos\psi_1 &= \\ &= \left(1 + \frac{f_2 n_1}{m_1+m_2}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right] \\ &- \frac{f_2 m_2}{m_1+m_2} Q_1\cos\gamma + \frac{f_2 n_2}{m_1+m_2} P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right). \end{aligned}\right\}$$

Aus den vorhergehenden Ausdrücken ziehen wir nun einmal die Werthe von N'^2 und N''^2, und finden, wenn 1 für $1 + f^2$ gesetzt wird,

$$\left\{\begin{aligned} N'^2 = & \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 Q_1^2 \cos^2\gamma + \left(\frac{n_2}{m_1+m_2}\right)^2 P_2^2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)^2 \\ & - \frac{2 n_2 m_2}{(m_1+m_2)^2} P_2 Q_1 \cos\gamma \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) \\ & + \left(1+\frac{n_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right]^2 \\ & - \frac{2 m_2 n_1}{(m_1+m_2)^2} Q_1 \cos\gamma \left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right] \\ & + \frac{2 n_1 n_2}{(m_1+m_2)^2} P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)\left[(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + \right. \\ & \qquad\qquad \left. + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J\right] \end{aligned}\right.$$

oder wenn zur Abkürzung $(Q_1+Q_2+3P_2)\sin\gamma + (Q_1+Q_2+3\beta P_2)\frac{v'}{g} + J$ durch J' ersetzt wird

$$N'^2 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) - \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right)^2 + J'^2.$$

Ebenso ergibt sich

$$\left\{\begin{aligned} N''^2 = & \left[\frac{m_1}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma + \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2 \left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right) + \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right]^2 \\ & + P_2\left(\sin\gamma + \beta\frac{v'}{g}\right)^2. \end{aligned}\right.$$

Nehmen wir aber außer der frühern Voraussetzung, daß γ und $\frac{v'}{g}$ klein bleiben sollen, noch an, daß n_1 und n_2 ziemlich klein seien gegen m_1 und m_2, also um so mehr gegen $m_1 + m_2$, so können für eine erste Annäherung die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} N' &= \sqrt{\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 Q_1^2 \cos^2\gamma + \left(1+\frac{n_1^2}{(m_1+m_2)^2}\right) J'^2} \\ N'' &= \frac{m_1}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma + \frac{n_1}{m_1+m_2} J' \end{aligned}\right\},$$

genügen, worin J' den Ausdruck $(Q_1 + Q_2 + 3P_2) \sin\gamma + J$ ersetzt.

Mit den oben abgeleiteten Werthen von $N'(\sin\psi_1 - f_1 \cos\psi_1)$ und $N''(\cos\psi_1 + f_2 \sin\psi_1)$ nimmt nun unsere Bedingungsgleichung (c) mit Weglassung des kleinen Gliedes $f_2 N' \frac{\varrho_1}{R_1} \frac{R_1^2}{k_1^2}$ die Form an:

$$\left.\begin{aligned} & f_1 \frac{\beta}{\beta-1}\left[\frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1 \cos\gamma + P_1 \cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2\left(\sin\gamma + \frac{v'}{g}\right) - \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right] \\ & > J \frac{r}{R_1} \frac{R_1^2}{k_1^2} + (Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2) \sin\gamma + (Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2) \frac{v'}{g} \end{aligned}\right\}, \text{(q.}$$

aus welchen noch v' oder J mittels der Gleichung der ohne Gleiten des Triebrades stattfindenden Bewegung zu eliminiren ist, da diese Größen selbst wieder von einander abhängen. Diese Gleichung ergibt sich durch Summiren der Gleichungen (d) und (n), und wird nun

$$\left.\begin{aligned} \left(Q_1 + Q_2 + \beta(P_1 + 3P_2)\right) \frac{dv}{dt} &= g\left(J \frac{r}{R_1} - (Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2) \sin\gamma\right) \\ & \quad - f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} g (N' + N'' + 2N''') \end{aligned}\right\} \text{(r.}$$

wenn man vorerst noch die Bezeichnung N', N'' und N''' statt der oben erhaltenen Näherungswerthe stehen läßt. Zieht man daraus den Werth von $(Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2) \frac{v'}{g}$ um ihn in die Bedingung (q) einzuführen, so folgt der Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} & f_1 \frac{\beta}{\beta-1}\left[\left(\frac{m_2}{m_1+m_2} Q_1 + P_1\right) \cos\gamma - \frac{n_2}{m_1+m_2} P_2\left(\sin\gamma + \frac{v'}{g}\right) - \frac{n_1}{m_1+m_2} J'\right] \\ & > J \frac{r}{R_1} \frac{\beta}{\beta-1} - \beta P_1 \frac{v'}{g} - f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} (N' + N'' + 2N''') \end{aligned}\right\}, \text{(s.}$$

worin man für eine erste Annäherung die mit $\frac{v'}{g}$ multiplizirten Glieder vernachlässigen und für J′ den oben bemerkten angenäherten Werth $(Q_1 + Q_2 + 3P_2) \sin\gamma + J$ nehmen kann, um daraus das Verhältniß von J zu den übrigen Kräften zu bestimmen, welches der Bedingung, daß die Räder a nicht ausgleiten sollen, Genüge leistet.

Die Gleichung (r) zeigt, daß wenn die ebengenannte Bedingung erfüllt wird, die Beschleunigung v′ unter sonst gleichen Umständen nur von der innern Kraft J abhängt, und daß wenn die Bewegung eine gleichförmige werden soll, die Intensität von J durch die Gleichung:

$$0 = J\frac{R}{r} - (Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2)\sin\gamma - f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N' + N'' + 2N''')$$

bestimmt wird, in welche aber noch die Werthe von N′ und N″ einzuführen sind, ehe man sie nach J auflöst. Wird die Bedingung (*s*) aber nicht befriedigt, so gibt uns die Summe der Gleichungen (e) und (a) die Gleichung der Bewegung, welche dann mit dem obigen Werthe von $N'(\sin\psi_1 - f_2\cos\psi_1)$ die Form annimmt:

$$\text{t.)}\left\{\begin{aligned} &\left[P_1 + f_1\frac{n_2}{m_1+m_2}\beta P_2 + \left(1 + f_1\frac{n_1}{m_1+m_2}\right)(Q_1 + Q_2 + 3\beta P_2)\right]\frac{dv}{dt} \\ &= g f_1\left[\left(\frac{m_2}{m_1+m_2}Q_1 + P_1\right)\cos\gamma - \frac{n_1}{m_1+m_2}\left((Q_1+Q_2)\sin\gamma + J\right)\right. \\ &\qquad\qquad\qquad \left. - \frac{3n_1+n_2}{m_1+m_2}P_2\sin\gamma\right] \\ &\quad - g(Q_1 + Q_2 + P_1 + 3P_2)\sin\gamma - g f_2\frac{\varrho_2}{R_2}(N'' + 2N''')\,, \end{aligned}\right.$$

und zeigt, daß nun die Beschleunigung nur insoferne von der innern Kraft J abhängt, als sie Einfluß auf den Druck N′ und dadurch auf $f_1 N_1$, d. i. auf die Reibung des Rades a an der Ebene MO hat, daß folglich diese Reibung die eigentliche äußere fördernde Kraft ist.

Für die bisherige Untersuchung wurde angenommen, daß die innere Kraft oberhalb der Achse des Rades a angreife und im Sinne der positiven x gerichtet, also in Bezug auf den Punkt F eine abstoßende sei. Lassen wir nun diese Kraft unterhalb der Achse angreifen und in Bezug auf F′ eine anziehende werden, so daß sie im Sinne der negativen x wirkt, so wird J in den Gleichungen (a), (e), (k) und (n)

und daher auch in den Werthen von N′ und N″ das Zeichen wechseln; der Druck N′ wird nun größer und N″ etwas kleiner. Im Uebrigen bleiben die Gleichungen der Bewegung ungeändert; denn das Moment $J(R_1 + r)$ in der Gleichung (b) wird nun $- J(R_1 - r)$; das Moment Jr bleibt also ungeändert, wie es sich von selbst versteht, und demnach auch die Gleichung (r) und die Bedingung (q), insoweit J nicht in die Werthe von N′ und N″ eingeht.

Für den einfachen Fall, wo die Bewegung eine gleichförmige und die Ebene OM wagrecht ist, und $\frac{m_2}{m_1 + m_2} = \frac{2}{3}$, $n_1 = 0$ genommen wird, ergeben sich aus dem Vorhergehenden folgende einfachere Werthe:

$$N''' = \tfrac{1}{2} Q_2 \quad , \quad N'' = \tfrac{1}{3} Q_1 \quad , \quad N' = \sqrt{\tfrac{4}{9} Q_1^2 + J^2} \; ;$$

die Bedingung (q) kommt auf

$$f_1 \beta \left(\frac{2}{3} Q_1 + P_1\right) > J \frac{r}{R_1}$$

zurück, und zeigt, daß J um so größer werden darf, je kleiner r gegen R_1 ist; die Bedingung der Gleichförmigkeit der Bewegung gibt aber auch

$$J \frac{r}{R_1} = f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} \left(Q_2 + \frac{1}{3} Q_1 + \frac{1}{3} \sqrt{4 Q_1^2 + 9 J^2}\right)$$

und wenn man das Quadrat des kleinen Factors $f_2 \frac{\varrho_2}{R_2}$ gegen das von $\frac{r}{R_1}$ vernachläßigen kann, einfach

$$J \frac{r}{R_1} = f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} (Q_1 + Q_2) \; ;$$

führt man dann diesen Werth in die vorhergehende Ungleichheit ein, so folgt

$$f_1 \beta \left(P_1 + \frac{2}{3} Q_1\right) > f_2 \frac{\varrho_2}{R_2} (Q_1 + Q_2)$$

als Bedingung für das Nichtausgleiten der Triebräder. Nimmt z. B. $f_1 = \frac{1}{6}$, $\beta = 1 + \frac{k_1^2}{R_1^2} = \frac{9}{5}$, $f_2 = 0{,}1$, $\frac{\varrho_2}{R_2} = 0{,}05$, so hat man

$$0{,}3\,(P_1 + \tfrac{1}{2}\,Q_1) > 0{,}005\,(Q_1 + Q_2)$$

also darf Q_2 höchstens gleich $60\,P_1 + 40\,Q_1$ werden, wenn die Triebräder nicht gleiten sollen.

§. 27.

Den nun leicht zu behandelnden Fall, wo das System sich auf der geneigten Ebene abwärts bewegt, wollen wir dem Leser zur Uebung empfehlen, und den gegenwärtigen Abschnitt mit einigen Aufgaben beschließen, welche eine einfache Anwendung der in §. 22 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen gestatten.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde der Druck, welchen eine cylindrische Achse auf ihr Lager, worin sie sich bewegt, ausübt, immer in einem Punkte vereinigt angenommen, also vorausgesetzt, daß jene Achse ihr Lager nur längs einer Geraden berühre und daß der Druck längs dieser Geraden durch eine Resultirende N in irgend einem Punkte dieser Geraden ersetzt werden könne, wodurch die Betrachtung auf den am Ende des in §. 29 im ersten Buche behandelten Fall zurückkommt. Es soll daher nun der Einfluß untersucht werden, welchen die Reibung auf die Bewegung einer Welle ausübt, wenn die Zapfen ihrer Achse ihre Lager in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, die Lager also überall vollkommen an den Zapfen anschließen. Eine solche vollkommene Berührung wird offenbar nur unter der Voraussetzung stattfinden können, daß Lager und Zapfen oder doch die erstern allein elastisch sind und sich gegenseitig oder wenigstens die Lager den Zapfen in der Form anpassen; es ist aber leicht einzusehen, daß die Annahme elastischer Lager und unveränderlicher Zapfen für unsern Zweck vollkommen genügt, und daß wir uns damit auch begnügen müssen, weil eine Veränderlichkeit in der Gestalt der Zapfen der drehenden Bewegung derselben noch andere und bedeutendere Verzögerungen verursachen würde, als die Reibung an der Lagerfläche erzeugt.

Dieser Annahme gemäß denken wir uns die Zapfen in ihre Lager zuerst ohne allen Druck geometrisch eingepaßt und lassen dann die gegebenen Kräfte an denselben angreifen, von denen wir der Einfachheit wegen voraussetzen, daß sie alle senkrecht zur Achse der Welle gerichtet sind, damit keine Verschiebung in der Richtung dieser Achse berücksichtigt werden darf. Durch den von diesen Kräften erzeugten Druck werden sich die Zapfen in ihre Lager etwas eindrücken, nämlich so weit bis der Widerstand der letztern gegen ein ferneres Zusammendrücken dem Druck der Zapfen gleich geworden ist, und die Lager vermöge ihrer Elasticität einen

Gegendruck ausüben, welcher in jedem Punkte der normalen Verschiebung dieses Punktes aus seiner ursprünglichen Lage proportional sein wird. Es wird ferner einleuchten, daß wenn es sich nicht um die Kenntniß der Vertheilung des Druckes auf die beiden Lager handelt und dieser in beiden Lagern in demselben Sinne gerichtet ist, die drehende Wirkung der gegebenen Kräfte in Bezug auf eine zur Achse der Welle senkrechte Gerade also Null wird für eine solche Senkrechte, welche noch zwischen die beiden Zapfenlager fällt, daß es in diesem Falle für die Untersuchung der drehenden Bewegung der Welle genügt, den Druck in einem der beiden Lager vereinigt und längs jeder Erzeugenden gleichmäßig vertheilt anzunehmen; es wird dann für jede Erzeugende einen resultirenden Druck geben, welcher in der Mitte derselben angreift, und sich die Betrachtung daher auf die Untersuchung der Verhältnisse in einem zur Achse senkrechten Querschnitt zurückführen lassen.

Sei demnach die Ebene der Figur 8 die Ebene dieses Querschnittes, C′ der Ort seines Mittelpunktes, wenn noch keine Kraft an der Welle angreift, C seine Lage während der Bewegung, also $C'C = e$ die als sehr klein vorausgesetzte Versetzung der Achse, welche durch den Druck der wirkenden Kräfte erfolgt. Man wird sich dann leicht überzeugen, daß die entsprechende normale Verrückung $M'M$ eines Punktes M' der Lagerfläche durch $e \cos \vartheta$ gemessen wird, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, welchen der zu M gezogene Halbmesser mit der verlängerten Verbindungslinie CC' der beiden Lagen des Mittelpunktes bildet; denn da $\frac{e}{r}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so wird der Halbmesser $C'M'$ sehr nahe parallel sein zu dem Halbmesser CM, wie auch der Punkt M zwischen den möglichen Grenzen m und m′ seiner Versetzung liegen mag; es werden folglich auch die Tangenten in M und M′ als parallel zu betrachten und ihr normaler Abstand wird sehr nahe $e \cos \vartheta$ sein. Dieser Werth wäre offenbar streng richtig, wenn der Punkt M′ nach m′, d. h. parallel zu CC' versetzt würde; man hat aber auch für eine blos normale Versetzung w von M′ nach m in der Verlängerung von $C'M'$

$$w = C'm - r = \sqrt{e^2 + r^2 + 2 e r \cos \vartheta} - r$$

also mit Vernachlässigung von $\frac{e^2}{r^2}$ neben $1 + 2 \frac{e}{r} \cos \vartheta$, und indem man mit gleicher Annäherung $\sqrt{1 + 2 \frac{e}{r} \cos \vartheta} = 1 + \frac{e}{r} \cos \vartheta$ setzt,

$$0{,}3\,(P_1 + \tfrac{2}{3}\,Q_1) > 0{,}005\,(Q_1 + Q_2)$$

also darf Q_2 höchstens gleich $60\,P_1 + 40\,Q_1$ werden, wenn die Triebräder nicht gleiten sollen.

§. 27.

Den nun leicht zu behandelnden Fall, wo das System sich auf der geneigten Ebene abwärts bewegt, wollen wir dem Leser zur Uebung empfehlen, und den gegenwärtigen Abschnitt mit einigen Aufgaben beschließen, welche eine einfache Anwendung der in §. 22 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen gestatten.

Bei den bisherigen Untersuchungen wurde der Druck, welchen eine cylindrische Achse auf ihr Lager, worin sie sich bewegt, ausübt, immer in einem Punkte vereinigt angenommen, also vorausgesetzt, daß jene Achse ihr Lager nur längs einer Geraden berühre und daß der Druck längs dieser Geraden durch eine Resultirende N in irgend einem Punkte dieser Geraden ersetzt werden könne, wodurch die Betrachtung auf den am Ende des in §. 29 im ersten Buche behandelten Fall zurückkommt. Es soll daher nun der Einfluß untersucht werden, welchen die Reibung auf die Bewegung einer Welle ausübt, wenn die Zapfen ihrer Achse ihre Lager in ihrer ganzen Ausdehnung berühren, die Lager also überall vollkommen an den Zapfen anschließen. Eine solche vollkommene Berührung wird offenbar nur unter der Voraussetzung stattfinden können, daß Lager und Zapfen oder doch die erstern allein elastisch sind und sich gegenseitig oder wenigstens die Lager den Zapfen in der Form anpassen; es ist aber leicht einzusehen, daß die Annahme elastischer Lager und unveränderlicher Zapfen für unsern Zweck vollkommen genügt, und daß wir uns damit auch begnügen müssen, weil eine Veränderlichkeit in der Gestalt der Zapfen der drehenden Bewegung derselben noch andere und bedeutendere Verzögerungen verursachen würde, als die Reibung an der Lagerfläche erzeugt.

Dieser Annahme gemäß denken wir uns die Zapfen in ihre Lager zuerst ohne allen Druck geometrisch eingepaßt und lassen dann die gegebenen Kräfte an denselben angreifen, von denen wir der Einfachheit wegen voraussetzen, daß sie alle senkrecht zur Achse der Welle gerichtet sind, damit keine Verschiebung in der Richtung dieser Achse berücksichtigt werden darf. Durch den von diesen Kräften erzeugten Druck werden sich die Zapfen in ihre Lager etwas eindrücken, nämlich so weit bis der Widerstand der letztern gegen ein ferneres Zusammendrücken dem Druck der Zapfen gleich geworden ist, und die Lager vermöge ihrer Elastizität einen

Gegendruck ausüben, welcher in jedem Punkte der normalen Verschiebung dieses Punktes aus seiner ursprünglichen Lage proportional sein wird. Es wird ferner einleuchten, daß wenn es sich nicht um die Kenntniß der Vertheilung des Druckes auf die beiden Lager handelt und dieser in beiden Lagern in demselben Sinne gerichtet ist, die drehende Wirkung der gegebenen Kräfte in Bezug auf eine zur Achse der Welle senkrechte Gerade also Null wird für eine solche Senkrechte, welche noch zwischen die beiden Zapfenlager fällt, daß es in diesem Falle für die Untersuchung der drehenden Bewegung der Welle genügt, den Druck in einem der beiden Lager vereinigt und längs jeder Erzeugenden gleichmäßig vertheilt anzunehmen; es wird dann für jede Erzeugende einen resultirenden Druck geben, welcher in der Mitte derselben angreift, und sich die Betrachtung daher auf die Untersuchung der Verhältnisse in einem zur Achse senkrechten Querschnitt zurückführen lassen.

Sei demnach die Ebene der Figur 8 die Ebene dieses Querschnittes, C′ der Ort seines Mittelpunktes, wenn noch keine Kraft an der Welle angreift, C seine Lage während der Bewegung, also $C'C = e$ die als sehr klein vorausgesetzte Versetzung der Achse, welche durch den Druck der wirkenden Kräfte erfolgt. Man wird sich dann leicht überzeugen, daß die entsprechende normale Verrückung M′M eines Punktes M′ der Lagerfläche durch $e \cos \vartheta$ gemessen wird, wenn ϑ den Winkel bezeichnet, welchen der zu M gezogene Halbmesser mit der verlängerten Verbindungslinie CC′ der beiden Lagen des Mittelpunktes bildet; denn da $\frac{e}{r}$ ein sehr kleiner Bruch ist, so wird der Halbmesser C′M′ sehr nahe parallel sein zu dem Halbmesser CM, wie auch der Punkt M zwischen den möglichen Grenzen m und m′ seiner Versetzung liegen mag; es werden folglich auch die Tangenten in M und M′ als parallel zu betrachten und ihr normaler Abstand wird sehr nahe $e \cos \vartheta$ sein. Dieser Werth wäre offenbar streng richtig, wenn der Punkt M′ nach m′, d. h. parallel zu CC′ versetzt würde; man hat aber auch für eine blos normale Versetzung w von M′ nach m in der Verlängerung von C′M′

$$w = C'm - r = \sqrt{e^2 + r^2 + 2er \cos \vartheta} - r$$

also mit Vernachlässigung von $\frac{e^2}{r^2}$ neben $1 + 2\frac{e}{r} \cos \vartheta$, und indem man mit gleicher Annäherung $\sqrt{1 + 2\frac{e}{r} \cos \vartheta} = 1 + \frac{e}{r} \cos \vartheta$ setzt,

Achse der positiven x einschließt, also $\pi - \gamma + \zeta$ der Winkel ihrer Richtung mit der Achse der positiven z', wobei wir sowohl diese Richtung als die Intensität R als unveränderlich voraussetzen wollen, so werden die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung der Welle längs der Achsen der x' und z' folgende:

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \Sigma . N \cos\lambda' + \Sigma . f N \cos l' + R \sin(\gamma - \zeta) \\ 0 = \Sigma . N \cos\nu' + \Sigma . f N \cos n' - R \cos(\gamma - \zeta) \end{array}\right.$$

oder mit der Beachtung, daß in allen Fällen $\Sigma . f N \cos l' = f \Sigma . N \cos\nu'$, $\Sigma . f N \cos n' = - f \Sigma . N \cos\lambda'$, und daß man $\Sigma . N \cos\lambda'$ einstweilen durch $N_0 r F_1(\zeta)$, $\Sigma . N \cos\nu'$ durch $N_0 r F_2(\zeta)$ ersetzen kann,

$$\text{f.)} \left\{\begin{array}{l} 0 = N_0 r \Big(F_1(\zeta) + f F_2(\zeta)\Big) + R \sin(\gamma - \zeta) , \\ 0 = N_0 r \Big(F_2(\zeta) - f F_1(\zeta)\Big) - R \cos(\gamma - \zeta) . \end{array}\right.$$

Man zieht daraus die Werthe:

$$\text{g.)} \left\{\begin{array}{l} N_0 r F_1(\zeta)(1 + f^2) = - R \Big(\sin(\gamma - \zeta) + f \cos(\gamma - \zeta)\Big) \\ N_0 r F_2(\zeta)(1 + f^2) = R \Big(\cos(\gamma - \zeta) - f \sin(\gamma - \zeta)\Big) \end{array}\right.$$

und findet dadurch die Gleichung:

$$\Big(\cos(\gamma - \zeta) - f \sin(\gamma - \zeta)\Big) F_1(\zeta) + \Big(\sin(\gamma - \zeta) + f \cos(\gamma - \zeta)\Big) F_2(\zeta) = 0 ,$$

zur Bestimmung des Werthes von ζ; sie nimmt für den ersten Fall mit den durch (b) bezeichneten Componenten des Druckes die Form an:

$$\text{h.)} \left\{\begin{array}{l} 0 = \Big(\cos(\gamma - \zeta) - f \sin(\gamma - \zeta)\Big) \sin 2\alpha \sin 2\zeta \\ \qquad + \Big(\sin(\gamma - \zeta) + f \cos(\gamma - \zeta)\Big)(2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\zeta) ; \end{array}\right.$$

im andern Falle dagegen wird sie mit den Componenten (c)

$$\left\{\begin{array}{l} 0 = \Big(\cos(\gamma - \zeta) - f \sin(\gamma - \zeta)\Big) \cos^2(\alpha - \zeta) \\ \qquad + \Big(\sin(\gamma - \zeta) + f \cos(\gamma - \zeta)\Big)\Big(\tfrac{1}{2}\pi + \alpha - \zeta + \tfrac{1}{2}\sin 2(\alpha - \zeta)\Big) \end{array}\right.$$

und läßt in beiden Fällen in Bezug auf ζ keine allgemeine Auflösung zu. Bezeichnet man aber *arc tang* f durch ϱ, so ergibt sich leicht aus der ersten dieser Gleichungen:

$$tang\,(\gamma - \zeta + \varrho) = -\frac{\sin 2\alpha \sin 2\zeta}{2\alpha + \sin 2\alpha \cos 2\zeta},$$

und aus der zweiten folgt ebenso (i.

$$tang\,(\gamma - \zeta + \varrho) = -\frac{\cos^2(\alpha - \zeta)}{\frac{1}{2}\pi + \alpha - \zeta + \frac{1}{2}\sin 2(\alpha - \zeta)}.$$

Mittels dieser Ausdrücke wird man also den Werth von γ bestimmen, welcher einem angenommenen Werthe von ζ entspricht, und so indirect durch mehrere Versuche auch den Werth von ζ für ein gegebenes γ erhalten. Diese Ausdrücke werden aber auch besonders dazu dienen, unsere beiden obengenannten Fälle zu unterscheiden, nämlich den Werth von γ zu bestimmen, welcher der Grenze $\alpha + \zeta = \frac{1}{2}\pi$ entspricht; für diese hat man $\zeta = \frac{1}{2}\pi - \alpha$, und damit geben die beiden vorhergehenden Gleichungen den Ausdruck:

$$tang\,(\tfrac{1}{2}\pi - \alpha - \gamma + \varrho) = \frac{\sin^2 2\alpha}{2\alpha - \frac{1}{2}\sin 4\alpha},$$

welcher durch den daraus folgenden Werth von γ zeigen wird, ob der erste oder zweite Fall stattfindet, je nachdem derselbe größer oder kleiner ist, als der gegebene Werth von γ. Soll z. B. $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ sein, so müßte $\zeta = 0$ werden, und $\gamma = -\varrho$; für $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\zeta = \frac{1}{4}\pi$ dagegen hat man

$$tang\,(\tfrac{1}{4}\pi - \gamma - \varrho) = \frac{2}{\pi} = tang\,32^0\,29'$$

und $\gamma + \varrho = 45^0 - 32^0\,29' = 12^0\,31'$, $\gamma = 12^0\,31' - \varrho$; wäre also $\varrho = 12^0\,31'$ oder $f = 0{,}222$, so müßte γ gerade Null sein; für kleinere Werthe von f dagegen wird γ noch einen positiven Werth erhalten können.

Hat man auf diese Weise für gegebene Werthe von α und ϱ den Grenzwerth für γ bestimmt und den Werth von ζ für das gegebene γ aus der entsprechenden der Gleichungen (i) annähernd berechnet, so gibt eine der Gleichungen (g) den entsprechenden Werth für $N_0\,r$, womit wir nun das Gesetz für die drehende Bewegung der Welle aufstellen können. Die Gleichung für diese Bewegung hat nämlich die Form:

k.) $$Q k^2 \frac{d\varphi}{dt} = g\,(M_Y - \Sigma . f N r)\,,$$

wenn Q das Gewicht der Welle und $\frac{Q}{g} k^2$ ihr Massenmoment, und M_Y die drehende Wirkung der an der Welle angreifenden Kräfte in Bezug auf die geometrische Achse derselben bezeichnet. Die drehende Wirkung der Reibung $\Sigma . f N r$ ist aber noch durch das Integral:

l.) $$\begin{cases} \Sigma . f N r = - f r^2 \int_{-(\alpha+\zeta)}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . N_0 \cos\vartheta = - f N_0 r^2 \Big(\sin(\alpha-\zeta) + \sin(\alpha+\zeta)\Big) \\ \qquad = - 2 f N_0 r^2 \sin\alpha \cos\zeta \end{cases}$$

zu ersehen, wenn $\alpha + \zeta < \frac{1}{2}\pi$, und durch

m.) $$\Sigma . f N r = - f N_0 r^2 \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\alpha-\zeta} d\vartheta . \cos\vartheta = - f N_0 r^2 \Big(1 + \sin(\alpha - \zeta)\Big)$$

wenn $(\alpha + \zeta) > \frac{1}{2}\pi$ ist, und in diese Ausdrücke hat man endlich noch die vorherberechneten Werthe von ζ und $N_0 r$ einzuführen, um die Winkelbeschleunigung $\frac{d\varphi}{dt}$ in Function der gegebenen Größen darzustellen oder durch deren gegebene Werthe auszudrücken.

Nehmen wir z. B. den Fall, wo $\zeta = 0$, $\alpha = \frac{1}{2}\pi$, und $\gamma = -\varrho$ ist, so haben wir aus der zweiten der Gleichungen (g)

$$N_0 r = R \frac{2}{\pi\sqrt{1+f^2}}$$

und damit wird

$$Q k^2 \frac{d\varphi}{dt} = g\left(M_Y - R r \frac{4 f}{\pi\sqrt{1+f^2}}\right).$$

Ist dagegen $\alpha = \frac{1}{4}\pi$, $\zeta = \frac{1}{4}\pi$ und $\gamma = \frac{1}{4}\pi - \left(\varrho + \operatorname{arc\,tang}\frac{2}{\pi}\right)$, also $\gamma - \zeta = -\left(\varrho + \operatorname{arc\,tang}\frac{2}{\pi}\right)$, so ergibt sich nach mehrfachen Reductionen:

$$cos(\gamma-\zeta)-f\,sin(\gamma-\zeta)=\sqrt{\frac{1+tang^2\varrho}{1+\frac{4}{\pi^2}}},$$

und damit folgt

$$N_0 r = R\,\frac{4}{\pi\sqrt{(1+f^2)\left(1+\frac{4}{\pi^2}\right)}},$$

$$Q k^2 \frac{d\varphi}{dt} = g\left(Mr - Rr\,\frac{4f}{\sqrt{(1+f^2)(\pi^2+4)}}\right);$$

man sieht daraus, daß in diesem Falle die verzögernde Wirkung der Reibung kleiner ist, als in dem vorhergehenden. Für sehr kleine Werthe von α und beziehungsweise für $\alpha = 0$, kann $sin\,2\alpha$ durch 2α ersetzt, und die Gleichung (h) auf die Form:

$$Q=\left(cos(\gamma-\zeta)-f\,sin(\gamma-\zeta)\right)sin\,2\zeta + \left(sin(\gamma-\zeta)+f\,cos(\gamma-\zeta)\right)(1+cos\,2\zeta)$$

gebracht werden, und man zieht daraus leicht

$$tang\,\zeta = -\,tang(\gamma+\varrho-\zeta)\ ,\quad \gamma=-\varrho\ ,\quad \zeta=0\,.$$

Dadurch geht der Werth für $\Sigma.fNr$ durch Elimination von $N_0 r$ in

$$\Sigma.fNr = Rr\,\frac{2\alpha f(cos\,\gamma - f\,sin\,\gamma)}{2\alpha(1+f^2)} = Rr\,sin\,\varrho = Rr\,\frac{f}{\sqrt{1+f^2}}$$

über, völlig übereinstimmend mit dem früher (I. Buch, §. 29) abgeleiteten Werthe.

§. 28.

Um endlich auch eine Anwendung der Gleichungen (37) zu erhalten, soll zuletzt noch unter gleichen Voraussetzungen wie vorher die Bewegung einer vertikal stehenden Welle untersucht werden, welche unten mit einem kugelförmig abgerundeten Zapfen in einem anschließenden Lager ruht und sich am obern Ende mit einem cylindrischen Zapfen an ein anpassendes Lager anlehnt, und an welcher außer ihrem Gewichte Q

noch eine zur Achse senkrecht gerichtete Kraft P von constanter Größe und Richtung angreift, deren constante drehende Wirkung P R sei.

Der Mittelpunkt der Kugelfläche, welche den untern Zapfen begrenzt, C, Fig. 9, sei der Anfang eines rechtwinkligen Coordinaten-Systems der x, y und z, dessen positive z-Achse mit der Achse der Welle zusammenfällt und abwärts gerichtet ist, und dessen xz-Ebene parallel zur Richtung der Kraft P sei; ferner sei C der Pol eines Kugel-Coordinatensystems der ϑ und ω, von welchen die erstern von der Achse der positiven z, die letztern von der positiven Hälfte der xz-Ebene an gemessen werden. C' sei die ursprüngliche Lage des Mittelpunktes C, bevor der Zapfen in das Lager eingedrückt worden, also $C'C$ oder CA die Richtung, in welcher jener Mittelpunkt durch den Druck verrückt worden ist; N_0 sei der geometrische Druck im Punkte A, wo die verlängerte CC' die Kugelfläche schneidet; N der in einem beliebigen Punkte M. Ist dann ϑ' der Winkel, welchen der Halbmesser CM mit der CA einschließt, so hat man wie im vorhergehenden Falle

$$N = N_0 \cos\vartheta' \;;$$

man hat aber auch, wenn ζ und ξ die Winkel sind, durch welche die Lage der Geraden CA gegen die z-Achse und die xz-Ebene bestimmt wird, zwischen dem Winkel ϑ' und den Coordinaten-Winkeln ϑ und ω des Punktes M die Beziehung:

$$\cos\vartheta' = \cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos(\omega - \xi) \,.$$

Mit diesem Werthe wird daher

a.) $$N = N_0(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')\,,$$

wenn wir nun, um die folgenden Beziehungen zu vereinfachen, die Ebene der xz so drehen, daß sie durch den Punkt A geht, und demnach den Winkel $\omega - \xi$ in dem vorstehenden Ausdrucke durch ω' ersetzen. Die Durchschnittslinie der Ebene BCA mit der Ebene der xy wird nun die Achse der x' werden, und die Winkel $\widehat{Nx'}$, $\widehat{Ny'}$, $\widehat{Nz}$, welche die Richtung des Druckes N mit den Achsen der positiven x', y' und z einschließt, sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\widehat{Nx'} = \sin\vartheta\cos\omega' \;,\quad \cos\widehat{Ny'} = \sin\vartheta\sin\omega' \;,\quad \cos\widehat{Nz} = \cos\vartheta \,,$$

womit auch die entsprechenden Componenten jenes geometrischen Druckes in dem Punkte M gegeben sind.

Die Reibung fN in diesem Punkte ist offenbar wie die Bewegung des letztern senkrecht zur Achse der z gerichtet, und bildet, wenn die drehende Bewegung des Zapfens um diese Achse im positiven Sinne vor sich gehend vorausgesetzt wird, mit den positiven Achsen der x' und y' die Winkel $\frac{1}{2}\pi - \omega'$ und $\pi - \omega'$; ihre zu diesen Achsen parallelen Componenten sind demnach

$$fN \sin \omega' \quad , \quad -fN \cos \omega' \text{ und } 0 .$$

Diese geometrischen Componenten des Druckes, und der Reibung sind die Aenderungsgesetze der entsprechenden physischen Componenten in Bezug auf die Aenderung der gedrückten Fläche, und da man für die Kugelfläche, deren Halbmesser r, ist (Buch II., §. 55), die Beziehung hat

$$\frac{d^2 O}{d\omega' d\vartheta} = r_{,}^2 \sin \vartheta ,$$

so hat man nach dem Vorhergehenden folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 . \Sigma . N \cos \lambda'}{d\omega' d\vartheta} &= N r_{,}^2 \sin^2 \vartheta \cos \omega' \\ \frac{d^2 . \Sigma . N \cos \mu'}{d\omega' d\vartheta} &= N r_{,}^2 \sin^2 \vartheta \sin \omega' \\ \frac{d^2 . \Sigma . N \cos \nu'}{d\omega' d\vartheta} &= N r_{,}^2 \cos \vartheta \sin \vartheta \end{aligned}\right\} \quad (b.$$

als Aenderungsgesetze der Componenten des physischen Druckes, und:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2 . \Sigma . f N \cos l'}{d\omega' d\vartheta} &= f N r_{,}^2 \sin \vartheta \sin \omega' \\ \frac{d^2 . \Sigma . f N \cos m'}{d\omega' d\vartheta} &= - f N r_{,}^2 \sin \vartheta \cos \omega' \end{aligned}\right\} \quad (c.$$

als Aenderungsgesetze der Componenten der Reibung, in welchen noch N durch den Werth (a) zu ersetzen ist.

Für die Ausführung der Integration hat man hinsichtlich der Grenzen von ϑ und ω' wieder zwei Fälle zu unterscheiden. Ist nämlich 2α die Oeffnung des Lagers, d. h. der Winkel, welcher dem Bogen DABE eines Achsenschnittes der Lagerfläche entspricht, so wird es wieder darauf ankommen, ob $\alpha + \zeta$ kleiner oder größer ist, als $\frac{1}{2}\pi$. Im ersten Falle sind die Grenzen von ϑ und von ω' unabhängig von einander; die von ϑ sind α und 0, die von ω' sind 2π und 0; die Aenderungsgesetze (b) geben daher die Integrale:

d.)

$$\Sigma . N\cos\lambda' = N_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \cos\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= N_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \pi \sin\zeta \sin^3\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{12}\pi N_0 r_,^2 \sin\zeta (8 - 9\cos\alpha + \cos 3\alpha) ;$$

$$\Sigma . N\cos\mu' = N_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin^2\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \sin\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= 0 ;$$

$$\Sigma . N\cos\nu = N_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \cos\vartheta\sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= N_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . 2\pi \cos\zeta \cos^2\vartheta \sin\vartheta$$

$$= \tfrac{2}{3}\pi N_0 r_,^2 \cos\zeta (1 - \cos^3\alpha) .$$

Ebenso folgen aus den Aenderungsgesetzen (c) die Werthe:

e.)

$$\Sigma . fN\cos l' = fN_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \sin\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= 0 ;$$

$$\Sigma fN\cos m' = -fN_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \cos\omega' (\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= -fN_0 r_,^2 \int_0^\alpha d\vartheta , \pi \sin^2\vartheta \sin\zeta$$

$$= -\tfrac{1}{2} fN_0 r_,^2 \pi \sin\zeta (\alpha - \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha) ;$$

Im zweiten Falle legen wir durch den Endpunkt G des in der Ebene der $x'z$ von A aus gemessenen Bogens $AG = \frac{1}{2}\pi r$, eine Ebene FG senkrecht zur Achse der Welle, und eine zweite CG senkrecht zur CA; diese wird durch den Mittelpunkt C gehen und ein Stück EHG von der Lagerfläche abschneiden, auf welches kein Druck mehr ausgeübt wird. Die Gleichung der letztern Ebene ist

$$\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega' = 0 \qquad (f.$$

und bestimmt die Grenzen von ω' in einem über der FG liegenden horizontalen Schnitte PQ, also für ein constantes ϑ, durch die Gleichung:

$$\cos\omega' = -\frac{1}{\tang\vartheta\tang\zeta} = -\cot\zeta\cot\vartheta \ .$$

Demgemäß theilen wir dann auch die Integrale unserer Gleichungen (b) und (c) in solche, welche sich auf die Kugelhaube FABG beziehen und in solche, welche die Componenten des Druckes und der Reibung für den übrigen Theil FGHD des Lagers ausdrücken. Für den ersten Theil sind die Grenzen von ϑ und ω' wie im ersten Falle unabhängig, und zwar $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ und 0 für ϑ, 2π und 0 für ω'; für diesen Theil erhält man daher die entsprechenden Werthe, wenn man in den Werthen (d) und (e) $\frac{1}{2}\pi - \zeta$ statt α einführt, und findet so

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 . N\cos\lambda' = \frac{1}{12}\pi N_0 r_{,}^2 \sin\zeta(8 - 9\sin\zeta + \sin 3\zeta) \\ \Sigma_1 . N\cos\mu' = 0 \\ \Sigma_1 . N\cos\nu' = \frac{2}{3}\pi N_0 r_{,}^2 \cos\zeta(1 - \sin^3\zeta) \end{array}\right\}, \quad (g.$$

und

$$\left.\begin{array}{l} \Sigma_1 . fN\cos l' = 0 \\ \Sigma_1 . fN\cos m' = -\frac{1}{2} f N_0 r_{,}^2 \pi(\frac{1}{2}\pi - \zeta)\sin\zeta \end{array}\right\}. \quad (h.$$

Für den übrigen Theil dagegen sind, wie schon angegeben, die Grenzen von ω' von ϑ abhängig, und werden, mit $\omega_{,}'$ und ω_0' bezeichnet, ausgedrückt durch

$$\omega_{,}' = \pi - \operatorname{arc}(\cos = \cot\zeta\cot\vartheta) \quad , \quad \omega_0' = -\omega_{,}' \ ;$$

als Grenzen von ϑ hat man α und $\frac{1}{2}\pi - \zeta$, und die diesem Theile entsprechenden Integrale der Gleichungen (h) werden damit

k)

$$\Sigma_2.N\cos\lambda' = N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\sin^2\vartheta \int_{-\omega_,'}^{\omega_,'} d\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')\cos\omega'$$

$$= N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\sin^2\vartheta\Big(2\cos\zeta\cos\vartheta\sin\omega_,' +$$

$$+ \sin\zeta\sin\vartheta(\tfrac{1}{2}\sin 2\omega_,' + \omega_,')\Big)$$

$$= N_0 r_,^2 \left[\cos\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta\cdot\sin^2\vartheta\cos\vartheta\sin\omega_,' + \sin\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\omega_,'\sin^2\vartheta\right],$$

$$\Sigma_2.N\cos\mu' = 0 ,$$

$$\Sigma_2.N\cos\nu' = N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\cos\vartheta\sin\vartheta \int_{-\omega_,'}^{\omega_,'} d\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta + \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')$$

$$= 2N_0 r_,^2 \left[\cos\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\omega_,'\cos^2\vartheta\sin\vartheta +\right.$$

$$\left. + \sin\zeta \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\cos\vartheta\sin^2\vartheta\sin\omega_,'\right];$$

ebenso findet man für die demselben Theile entsprechenden Componenten der Reibung die Werthe:

k.)

$$\Sigma_2.fN\cos l' = 0$$

$$\Sigma_2.fN\cos m' = -N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta.\sin\vartheta \int_{-\omega_,'}^{\omega_,'} d\omega'(\cos\vartheta\cos\zeta +$$

$$+ \sin\vartheta\sin\zeta\cos\omega')\cos\omega'$$

$$= -N_0 r_,^2 \int_{\frac{1}{2}\pi-\zeta}^{\alpha} d\vartheta\left[\cos\zeta\sin\vartheta\cos\vartheta\sin\omega_,' + \omega_,'\sin\zeta\sin^2\vartheta\right].$$

In diese Ausdrücke sind noch die Werthe von ω_1' und $\sin\omega_1'$ in Function von ϑ einzuführen, und die Integration in Bezug auf diese Veränderliche auszuführen, um die gesuchten Werthe für $\Sigma_2 . \mathrm{N}\cos\lambda'$, u. s. f. zu erhalten, welche dann zu $\Sigma_1 . \mathrm{N}\cos\lambda'$ u. s. f. addirt, die Componenten des Druckes und der Reibung für unsern zweiten Fall darstellen werden. Ich werde jedoch auf diesen Fall nicht weiter eingehen, sondern für die Anwendung der nachfolgenden Gleichungen der Bewegung der Welle voraussetzen, daß die Oeffnung des Lagers nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$ sei, so daß $\alpha = \frac{1}{2}\pi$ wird und $\alpha + \zeta$ in keinem Falle größer als $\frac{1}{2}\pi$ werden kann.

Bezeichnen wir nun noch die Componenten des physischen Druckes auf das obere cylindrische Lager der Welle und der Reibung in demselben, parallel und senkrecht zu der Richtung, nach welcher der obere Zapfen der Welle in dieses Lager eingedrückt wird, mit $\Sigma . \mathrm{N}'\cos\lambda'$, $\Sigma . \mathrm{N}'\cos\mu'$, $\Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{l}'$, $\Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{m}'$, bestimmen die genannte Richtung durch den Winkel ξ' mit der Achse der x, und setzen den Reibungscoeffizient für beide Lager gleich voraus, so haben wir für die fortschreitende Bewegung der Welle längs der Achsen x', y' und z' die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\Sigma . \mathrm{N}\cos\lambda' - (\Sigma . \mathrm{N}'\cos\lambda' + \Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{l}')\cos(\xi - \xi') \\
&\quad - (\Sigma . \mathrm{N}'\cos\mu' + \Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{m}')\sin(\xi - \xi') - \mathrm{P}\cos\xi \\
0 &= -\Sigma . \mathrm{fN}\cos\mathrm{m}' - (\Sigma . \mathrm{N}'\cos\mu' + \Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{m}')\cos(\xi - \xi') \\
&\quad + (\Sigma . \mathrm{N}'\cos\lambda' + \Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{l}')\sin(\xi - \xi') + \mathrm{P}\sin\xi \\
0 &= -\Sigma . \mathrm{N}\cos\nu' + \mathrm{Q}
\end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{l}.$$

und in diese sind außer den obigen Werthen (d) und (e) noch die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma . \mathrm{N}'\cos\lambda' &= \mathrm{N}_0'\,\mathrm{r}_2(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha'\cos 2\xi'') \\
\Sigma . \mathrm{N}'\cos\mu' &= -\tfrac{1}{2}\mathrm{N}_0'\,\mathrm{r}_2\sin 2\alpha'\sin 2\xi'' \\
\Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{l}' &= \tfrac{1}{2}\mathrm{fN}_0\,\mathrm{r}_2\sin 2\alpha'\sin 2\xi'' \\
\Sigma . \mathrm{fN}'\cos\mathrm{m}' &= \mathrm{fN}_0\,\mathrm{r}_2(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha'\cos 2\xi'')
\end{aligned}\right\} \ldots (\mathrm{m}.$$

einzuführen, welche sich aus dem vorhergehenden Paragraphen mit der Beachtung ergeben, daß der dortige Winkel ζ nun durch ξ'' ersetzt ist und daher die Achse der negativen z' mit der Richtung des Druckes N_0', die Achse der x' mit der dazu senkrechten Richtung vertauscht werden

muß, daß aber hier die Richtung der N' im Sinne des Druckes genommen ist; diese Werthe setzen ferner voraus, daß $\alpha' + \xi''$ nicht größer als $\frac{1}{2}\pi$ werden kann, daß r_2 der Halbmesser des cylindrischen Lagers, $2\alpha'$ die Oeffnung desselben, N_0' den geometrischen Druck in der durch den Winkel ξ' bestimmten Richtung und ξ'' den Winkel bezeichnet, welchen diese Richtung mit der die cylindrische Lagerfläche halbirenden vertikalen Ebene bildet und welcher mit dem Winkel ξ' durch die Beziehung:

$$\xi' = \varepsilon + \xi''$$

verbunden ist, wenn die genannte Ebene den Winkel ε mit der Ebene der $x\,z$ bildet.

Diese drei Gleichungen genügen aber nicht zur Bestimmung der fünf Unbekannten, N_0, N_0', ξ, ξ', ζ; dazu müssen wir noch die Gleichungen für die drehende Bewegung um zwei zur Achse der Welle senkrechte Achsen, z. B. um die der x' und y', oder was hier dasselbe ist, die Gleichungen für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen in Bezug auf diese Achsen zu Hülfe nehmen, und demnach zuvor die drehende Wirkung der Reibungen fN nach den Gleichungen (43) ableiten; denn die drehende Wirkung der Druckkräfte N ist für den Punkt C offenbar Null und für die Druckkräfte N' und die Reibungen fN' leuchtet ein, daß die Angriffspunkte der Componenten $\Sigma . N' \cos \lambda'$, $\Sigma . N' \cos \mu'$, $\Sigma . fN' \cos l'$ und $\Sigma . fN' \cos m'$ in der Mitte der Höhe des obern Lagers liegen müssen; ihre drehenden Wirkungen in Bezug auf die genannten Achsen sind daher, wenn h die Entfernung dieser Mitte von dem Mittelpunkte C, im Sinne der negativen z genommen, bedeutet

$$\text{n.)} \begin{cases} \left.\begin{matrix} \Sigma . N'(y \cos \nu - z \cos \mu) \\ + \Sigma . fN'(y \cos n - z \cos m) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} h(\Sigma . N' \cos \lambda' + \Sigma . fN' \cos l')(\sin(\xi - \xi') \\ - h(\Sigma . N' \cos \mu' + \Sigma . fN' \cos m') \cos(\xi - \xi'), \end{matrix}\right. \\ \left.\begin{matrix} \Sigma . N'(z \cos \lambda - x \cos \nu) \\ + \Sigma . fN'(z \cos l - x \cos n) \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} h(\Sigma . N' \cos \lambda' + \Sigma . fN' \cos l') \cos(\xi - \xi') \\ + h(\Sigma . N' \cos \mu' + \Sigma . fN' \cos m') \sin(\xi - \xi'). \end{matrix}\right. \end{cases}$$

Für die drehenden Wirkungen der Reibung am untern Zapfen haben wir dagegen, da alle $n = \frac{1}{2}\pi$ sind, die Aenderungsgesetze:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2 . \Sigma . fNz \cos m'}{d\omega' d\vartheta} = - fNr_{,}^{3} \sin \vartheta \cos \vartheta \cos \omega' , \\ \dfrac{d^2 . \Sigma . fNz \cos l'}{d\omega' d\vartheta} = fNr_{,}^{3} \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \omega' , \end{cases}$$

aus welchen wir nach Einführung des Werthes von N durch Integration zwischen den Grenzen α und 0 für ϑ, und 2π und 0 für ω' folgende Werthe ziehen:

(o.

$$-\Sigma . \mathrm{f} N z \cos m' = \mathrm{f} N_0 r_,^3 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin\vartheta \cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \cos\omega' (\cos\vartheta \cos\zeta + \sin\vartheta \sin\zeta \cos\omega')$$

$$= \mathrm{f} N_0 r_,^3 \int_0^\alpha d\vartheta . \pi \sin\zeta \sin^2\vartheta \cos\vartheta$$

$$= \tfrac{1}{3}\pi \mathrm{f} N_0 r_,^3 \sin\zeta \sin^3\alpha$$

$$\Sigma . \mathrm{f} N z \cos l' = \mathrm{f} N_0 r_,^3 \int_0^\alpha d\vartheta . \sin\vartheta \cos\vartheta \int_0^{2\pi} d\omega' . \sin\omega' (\cos\vartheta \cos\zeta + \sin\vartheta \sin\zeta \cos\omega')$$

$$= 0$$

Bezeichnen wir nun noch die Entfernung des Angriffspunktes der Kraft P von der Ebene der $x'y'$ im Sinne der negativen z oder aufwärts genommen mit p, womit die Momente dieser Kraft in Bezug auf die Achsen der x' und y' die Form erhalten:

$$P p \sin\xi \quad \text{und} \quad P p \cos\xi ,$$

so finden wir mit den obigen Werthen (m) für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen in Bezug auf dieselben Achsen die Gleichungen:

$$0 = N_0' r_2 h \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \cos 2\xi'' + \tfrac{1}{2}\mathrm{f} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'') \sin(\xi - \xi') + \Big(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \sin 2\xi'' - \mathrm{f}(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \cos(\xi - \xi')\Big)\Big] + \tfrac{1}{3}\pi \mathrm{f} N_0 r_,^3 \sin\zeta \sin^3\alpha + P p \sin\xi$$

$$0 = N_0' r_2 h \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \cos 2\xi'' + \tfrac{1}{2}\mathrm{f} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'') \cos(\xi - \xi') - \Big(\tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \sin 2\xi'' - \mathrm{f}(\alpha' + \tfrac{1}{2}\sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \sin(\xi - \xi')\Big)\Big] + P p \cos\xi ,$$

oder in anderer Form:

$$
\text{p.)}\ \begin{cases}
0 = N_0' r_2 h \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \big(\sin(\xi - \xi') - f \cos(\xi - \xi') \big) \\
\qquad + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \big(\cos(\xi - \xi') + f \sin(\xi - \xi') \big) \Big] \\
\qquad + \tfrac{1}{3} \pi f N_0 r_,^3 \sin\zeta \sin^3\alpha + P p \sin\xi \\
0 = N_0' r_2 h \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \big(\cos(\xi - \xi') + f \sin(\xi - \xi') \big) \\
\qquad - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \big(\sin(\xi - \xi') - f \cos(\xi - \xi') \big) \Big] \\
\qquad + P p \cos\xi \ .
\end{cases}
$$

Werden dann weiter die Gleichungen (l) mit Einführung der Werthe (d), (e) und (m) unter eine ähnliche Form gebracht, so erhält man:

$$
\text{q.)}\ \begin{cases}
0 = -\tfrac{1}{12} \pi N_0 r_,^2 \sin\zeta (8 - 9 \cos\alpha + \cos 3\alpha) - P \cos\xi \\
\qquad - N_0' r_2 \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \big(\cos(\xi - \xi') + f \sin(\xi - \xi') \big) \\
\qquad - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \big(\sin(\xi - \xi') - f \cos(\xi - \xi') \big) \Big] , \\
0 = P \sin\xi - \tfrac{1}{2} \pi f N_0 r_,^2 \sin\zeta (\alpha - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha) \\
\qquad + N_0' r_2 \Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \cos 2\xi'') \big(\sin(\xi - \xi') - f \cos(\xi - \xi') \big) \\
\qquad + \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha' \sin 2\xi'' \big(\cos(\xi - \xi') + f \sin(\xi - \xi') \big) \Big] , \\
0 = Q - \tfrac{2}{3} \pi N_0 r_,^2 \cos\zeta (1 - \cos^3\alpha) ,
\end{cases}
$$

und zieht aus der letzten sogleich

$$
\text{r.)} \qquad N_0 r_,^2 \cos\zeta = Q \frac{3}{2\pi(1 - \cos^3\alpha)}
$$

Die erste dieser Gleichungen mit h multiplizirt und zu der zweiten der Gleichungen (p) addirt führt auf den Ausdruck:

$$
0 = \tfrac{1}{12} \pi N_0 r_,^2 h \sin\zeta (8 - 9 \cos\alpha + \cos 3\alpha) + P (h - p) \cos\xi \ ;
$$

wird dagegen die zweite mit h multiplizirt und davon die erste der Gleichungen (p) abgezogen, so ergibt sich

$$
0 = -\tfrac{1}{6} \pi f N_0 r_,^2 \sin\zeta \big(3h(\alpha - \tfrac{1}{2} \sin 2\alpha) + 2 r_, \sin^3\alpha \big)
$$
$$
+ P (h - p) \sin\xi \ ,
$$

und aus der Verbindung dieser beiden letzten Ergebnisse folgt der Werth:

$$tang\,\xi = f\,\frac{3h(2\alpha - sin\,2\alpha) + 4r_{,}\,sin^3\alpha}{-h(8 - 9\,cos\,\alpha + cos\,3\alpha)}\,, \qquad (s$$

durch welchen bei gehöriger Rücksicht auf die Zeichen des Zählers und Nenners (Buch I., §. 8) der Winkel ξ bestimmt ist. Damit findet man weiter

$$N_0\,r_{,}^2\,sin\,\zeta = -P\,\frac{12(h-p)\,cos\,\xi}{\pi h(8 - 9\,cos\,\alpha + cos\,3\alpha)} \qquad (t.$$

und dieser Ausdruck mit (r) verbunden gibt den Winkel ζ durch die Function:

$$tang\,\zeta = -\frac{P\,cos\,\xi}{Q}\,\frac{8(h-p)(1-cos^3\alpha)}{h(8 - 9\,cos\,\alpha + cos\,3\alpha)}\,; \qquad (u.$$

und damit oder auch durch die Summe der Quadrate von (r) und (t) folgt noch der Werth für N_0, mit welchem nun drei unserer Unbekannten bestimmt sind. In Betreff des Winkels ξ ist aber noch zu bemerken, daß man aus (t) für $sin\,\zeta$ immer einen Werth erhalten muß, welcher positiv und kleiner als 1 ist; im entgegengesetzten Falle, welcher z. B. eintritt, wenn α sehr klein ist, könnte der untere Zapfen nicht in seinem Lager im Gleichgewicht bleiben und es müßte noch ein neuer Widerstand gegen die Verschiebung desselben eingeführt werden.

Aus den beiden ersten der Gleichungen (p) zieht man nun ferner wie im vorhergehenden Paragraphen die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}
0 = N_0'\,r_2\,h(1+f^2)&\Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2}\,sin\,2\alpha'\,cos\,2\xi'')\,cos(\xi-\xi') \\
&\quad - \tfrac{1}{2}\,sin\,2\alpha'\,sin\,2\xi''\,sin(\xi-\xi')\Big] \\
&- \tfrac{2}{3}f^2 N_0'\,r_{,}^3\,\pi\,sin\,\zeta\,sin^3\alpha + Pp(cos\,\xi - f\,sin\,\xi)\,, \\
0 = N_0'\,r_2\,h(1+f^2)&\Big[(\alpha' + \tfrac{1}{2}\,sin\,2\alpha'\,cos\,2\xi'')\,sin(\xi-\xi') \\
&\quad + \tfrac{1}{2}\,sin\,2\alpha'\,sin\,2\xi''\,cos(\xi-\xi')\Big] \\
&+ \tfrac{2}{3}f N_0\,r_{,}^3\,\pi\,sin\,\zeta\,sin^3\alpha + Pp(sin\,\xi + f\,cos\,\xi)\,,
\end{aligned}\right\} \qquad (v.$$

welche nach erfolgter Elimination von $N_0'\,r_2\,h(1+f^2)$ dazu dienen werden, den Winkel ξ'' zu berechnen, und damit auch den Werth der letzten unserer unbekannten Größen N_0' zu bestimmen.

Es erübrigt uns also zur Lösung unserer Aufgabe noch die Gleichung für die drehende Bewegung des Systems in Bezug auf die geometrische Achse der Welle aufzustellen, da diese das eigentliche Ziel unserer Untersuchung ist. Die drehende Wirkung der Reibung an dem obern Zapfen ist nach der vorhergehenden Aufgabe und unter der Voraussetzung $\alpha' + \xi'' < \frac{1}{2}\pi$

$$\Sigma . f N' r_2 = 2 f N_0' r_2^2 \sin\alpha' \cos\xi'' \; ;$$

ferner haben wir, wie leicht abzuleiten ist, für die drehende Wirkung der Reibung am untern Zapfen das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d . \Sigma . f N r}{d\omega' \, d\vartheta} = f N r_{,}^2 \sin\vartheta . r_{,} \sin\vartheta$$
$$= f N_0 r_{,}^3 \sin^2\vartheta \left(\cos\zeta \cos\vartheta + \sin\zeta \sin\vartheta \cos\omega' \right) ,$$

welches zwischen den Grenzen α und 0 für ϑ, 2π und 0 für ω' zu integriren ist, und so den Ausdruck gibt:

$$\Sigma . f N r = \tfrac{2}{3} f N_0 r_{,}^3 \pi \cos\zeta \sin^3\alpha$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung (r)

$$\Sigma . f N r = f Q r_{,} \frac{\sin^3\alpha}{1 - \cos^3\alpha} ;$$

diese drehende Wirkung ist demnach unabhängig von der Kraft P, weil diese den geometrischen Druck in der Richtung der positiven α' zwar vermehrt, in der entgegengesetzten Richtung dagegen ebensoviel vermindert.

Die drehende Wirkung der Kraft P ist oben schon gleich PR vorausgesetzt; die Gleichung für die drehende Bewegung um die Achse der Welle wird demnach

$$\frac{Q}{g} k^2 \frac{d\varphi}{dt} = P R - 2 f N_0' r_2^2 \sin\alpha' \cos\xi'' - f Q r_{,} \frac{\sin^3\alpha}{1 - \cos^3\alpha} ,$$

wenn man das Massemoment der Welle und Alles dessen, was damit fest verbunden ist, durch $\frac{Q}{g} k^2$ ausdrückt.

Um einen besondern Fall näher zu untersuchen, wollen wir zuerst dem obern cylindrischen Lager eine solche Lage geben, daß der Winkel ξ''

Null wird, die Richtung des Druckes N_0' also den Bogen des Lagers halbirt und dann diesen Bogen gleich einem Halbkreis nehmen. Unter dieser Voraussetzung wird $\xi' = \varepsilon$, und die Gleichungen (v) nehmen die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} 0 = \frac{1}{2}\pi N_0' r_2 h (1+f^2) \cos(\xi-\varepsilon) - \frac{1}{3} f^2 N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha \\ \qquad + P p (\cos\xi - f \sin\xi) \\ 0 = \frac{1}{2}\pi N_0' r_2 h (1+f^2) \sin(\xi-\varepsilon) + \frac{1}{3} f N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha \\ \qquad + P p (\sin\xi + f \cos\xi) \end{array}\right\} \text{(x.}$$

und geben durch den Ausdruck:

$$\tang(\varepsilon-\xi) = \frac{P p (\sin\xi + f \cos\xi) + \frac{1}{3} f N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha}{-P p (\cos\xi - f \sin\xi) + \frac{1}{3} f^2 N_0 r_,^3 \pi \sin\zeta \sin^3\alpha} \text{ . (y.}$$

den Winkel ε, durch welchen die Lage des obern Lagers bestimmt wird, wenn zuvor ξ nach Gleichung (s) berechnet worden ist.

Nehmen wir z. B. noch die Oeffnung 2α des untern Lagers $= \frac{1}{2}\pi$ an, und setzen $P = \frac{1}{6} Q$, $h = 8 r$, $p = 4 r$, $r_2 = \frac{1}{10} r$, und $f = 0,1$, so gibt die genannte Gleichung

$$\tang\xi = 0,1 \frac{24(\frac{1}{2}\pi - 1) + \sqrt{2}}{-8(8-5\sqrt{2})} \;;\; \xi = 169^0\, 33',4 \;;$$

der Werth (u) von $\tang\zeta$ wird damit

$$\tang\zeta = \frac{1}{5} \sin 79^0\, 33',4 \frac{4-\sqrt{2}}{8-5\sqrt{2}} = \tang 28^0\, 42'$$

und zeigt, daß unter den gegebenen Verhältnissen der untere Zapfen nicht aus seinem Lager weichen kann. Aus der Gleichung (t) folgt der Werth:

$$\pi N_0 r_,^2 \sin\zeta = \frac{3}{5} Q \sin 79^0\, 33',4 \frac{8+5\sqrt{2}}{7} = 1,2704\, Q \;,$$

und die vorhergehende Gleichung (y) gibt mit diesem und den übrigen Zahlenwerthen den Ausdruck:

$$tang\,(\varepsilon-\xi)=\frac{\frac{4}{5}\,(cos\,79^{\circ}33',4-0{,}1\,sin\,79^{\circ}33',4)+\frac{0{,}127}{12}\sqrt{2}}{\frac{4}{5}\,(sin\,79^{\circ}33',4+0{,}1\,cos\,79^{\circ}33',4)+\frac{0{,}0127}{12}\sqrt{2}}\,,$$

aus welchem

$$\varepsilon-\xi=5^{\circ}\,34',3\quad,\qquad \varepsilon=175^{\circ}\,7',7$$

folgt; die vertikale Ebene, welche das obere Lager halbirt, muß demnach mit der Richtung der Kraft P einen Winkel $\pi-\varepsilon=4^{\circ}\,52',3$ einschließen, welcher also kleiner als ϱ ist, da man hat

$$f=0{,}1=tang\,\varrho=tang\,5^{\circ}\,42{,}7\ .$$

Auf gleiche Weise findet man weiter aus einer der Gleichungen (x) den Werth

$$N_0'\,r_2=0{,}0794\,Q$$

und damit als Gleichung der drehenden Bewegung

$$\frac{Q}{g}\,k^2\,\frac{d\varphi}{dt}=P\,R-0{,}00159\,Q\,r_,-0{,}05469\,Q\,r_,$$

$$=P\,R-0{,}05628\,Q\,r_,=(0{,}2\,R-0{,}05628\,r_,)\,Q\ .$$

Soll daher die drehende Bewegung eine gleichförmige werden, so muß

$$R=0{,}2814\,r_,\ ,$$

sein, es darf also R nicht ganz dreimal so groß als der obere cylindrische Zapfen der Welle werden.

Zweiter Abschnitt.

Innere Zustände eines veränderlichen Systems.

Erstes Kapitel.

Allgemeine Gesetze des innern Gleichgewichtes und der innern Bewegung.

§. 29.

Die äußern Zustände eines veränderlichen Systems, welche wir im vorhergehenden Abschnitte untersucht haben, lassen sich auch als diejenigen bezeichnen, welche ein außerhalb des Systems befindlicher unbeweglicher Beobachter an demselben wahrnehmen würde, der das System nur als ein zusammengehörendes Ganze in's Auge faßt, und dessen Lage ohne Rücksicht auf die in ihm vorgehenden Veränderungen mit andern unbeweglichen Punkten des Raumes vergleicht. Die innern Zustände dagegen werden sich der Wahrnehmung eines dem System selbst angehörigen Beobachters darbieten, welcher, an der äußern Bewegung desselben Theil nehmend, sein Augenmerk auf die gegenseitige Lage der einzelnen Punkte des Systems richtet und deren Zustände beurtheilt. Diese Zustände werden offenbar für die einzelnen Punkte sehr verschieden sein, und man kann daher nur im Allgemeinen von einem innern örtlichen Zustande des ganzen Systems reden, man kann nur allgemein sagen, dasselbe ist innerlich im Gleichgewicht oder in Bewegung; insbesondere aber lassen sich Gesetze des innern Gleichgewichtes oder der innern Bewegung nur für bestimmte Punkte oder für die einzelnen unveränderlichen Theile des Systems aufstellen, je nachdem dasselbe auf die eine oder die andere Weise zusammengesetzt ist;

indem man dann diese Untersuchungen auf alle Punkte oder Theile des Systems ausdehnt und die Lage derselben für einen gegebenen Zeitpunkt bestimmt, gelangt man dazu, die dauernde oder die vorübergehende augenblickliche Gestalt des Systems darzustellen, welche nun den entsprechenden innern Zustand desselben in jenem Augenblicke oder auf die Dauer kennzeichnet.

In der allgemeinsten Auffassung haben wir es nach dem zuvor Gesagten bei der Untersuchung der innern Zustände veränderlicher Systeme immer mit den Bedingungen des relativen Gleichgewichtes und den Gesetzen der relativen Bewegung eines materiellen Punktes oder eines festen Systems zu thun; in den meisten Fällen der Anwendung wird jedoch das System im Zustande des äußern Gleichgewichtes vorausgesetzt, und unter dieser Voraussetzung werden dann inneres Gleichgewicht und innere Bewegung absolute Zustände des Systems. In beiden Fällen liefern uns daher die beiden vorhergehenden Bücher die Mittel zur Untersuchung dieser innern Zustände, wenn die Zusammensetzung des Systems gehörig berücksichtigt wird und die zwischen den einzelnen Punkten oder Theilen desselben thätigen Kräfte mit den äußern Kräften in die dort abgeleiteten Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht und in die Aenderungsgesetze der Bewegung eingeführt werden. Dazu muß also wieder zuerst die Gesammtwirkung ermittelt werden, welche von diesen innern Kräften auf einen Punkt oder einen festen Theil des Systems ausgeübt wird, und in dieser Beziehung ergibt sich, wie schon in den einleitenden Betrachtungen bemerkt wurde, ein wesentlicher Unterschied, je nachdem das System nur aus einzelnen materiellen Punkten oder festen Theilen von bestimmter Anzahl besteht, oder für unsere Vorstellung ein stetig-zusammenhängendes System von materiellen Punkten ist, von denen man weder Zahl noch Größe kennt, namentlich wenn in diesem Falle auch die Function ihrer gegenseitigen Wirkung unbekannt oder nicht im Voraus gegeben ist. Denn während sich im ersten Falle jene Gesammtwirkung nach der im ersten Abschnitt des ersten und des zweiten Buches angegebenen Weise für irgend eine Lage der einzelnen materiellen Punkte oder festen Theile direct bestimmen läßt, kann dieselbe im zweiten Falle nur als unbekannte Kraft in die Gleichungen für das Gleichgewicht und die Bewegung eines Punktes eingeführt werden, und diese nehmen dadurch, wie die folgende Untersuchung zeigen wird, eine ganz andere Form und Behandlung an.

I. Nicht stetige veränderliche Systeme.

§. 30.

Betrachten wir zuerst ein System von n einzelnen materiellen Punkten M_1, M_2, M_3, M_i, u. s. f., deren Zahl begrenzt ist und deren Massen m_1, m_2, m_3, m_i, u. s. f. gegeben sind oder als bekannt vorausgesetzt werden.

Durch den Mittelpunkt der Masse dieses Systems denken wir uns drei unter sich rechtwinklige Achsen gezogen, welche vorerst noch zu beliebig gewählten festen Achsen parallel bleiben sollen, und deren Lage gegen die letztern am Ende der Zeit t durch die Coordinaten X, Y, Z ihres Anfangspunktes bestimmt sei. In Bezug auf diese beweglichen Achsen seien dann x_1, y_1, z_1 die Coordinaten des Punktes M_1, x_2, y_2, z_2 die des Punktes M_2, u. s. f., X_1, Y_1, Z_1 die zu jenen Achsen parallelen rechtwinkligen Componenten der Resultirenden R_1 aller auf den Punkt M_1 wirkenden äußern Kräfte, X_2, Y_2, Z_2 die entsprechenden Componenten für den Punkt M_2, u. s. f.; ferner seien wieder $J_{1,2}$ die zwischen den Punkten M_1 und M_2, $J_{1,3}$ die zwischen M_1 und M_3, $J_{2,3}$ die zwischen M_2 und M_3 thätigen innern Kräfte, $\alpha_{1,2}$, $\beta_{1,2}$, $\gamma_{1,2}$ die Richtungswinkel für $J_{1,2}$ in Bezug auf jene Coordinatenachsen, wenn diese Kraft an M_1 angreifend gedacht wird, $\alpha_{1,3}$, $\beta_{1,3}$, $\gamma_{1,3}$ die Winkel, welche die Richtung der an M_1 angreifenden Kraft $J_{1,3}$ bestimmen, $\alpha_{2,3}$, $\beta_{2,3}$, $\gamma_{2,3}$ die, welche die Richtung der an M_2 wirkenden $J_{2,3}$ mit den drei Achsen bildet, u. s. f. Man hat dann wie in §. 5 als Componenten der fördernden Gesammtwirkung aller an M_1 thätigen Kräfte

$$X_1 + J_{1,2} \cos\alpha_{1,2} + J_{1,3} \cos\alpha_{1,3} + J_{2,3} \cos\alpha_{2,3} + \text{etc.} + J_{1,n} \cos\alpha_{1,n} \,,$$

$$Y_1 + J_{1,2} \cos\beta_{1,2} + J_{1,3} \cos\beta_{1,3} + J_{2,3} \cos\beta_{2,3} + \text{etc.} + J_{1,n} \cos\beta_{1,n} \,,$$

$$Z_1 + J_{1,2} \cos\gamma_{1,2} + J_{1,3} \cos\gamma_{1,3} + J_{2,3} \cos\gamma_{2,3} + \text{etc.} + J_{1,n} \cos\gamma_{1,n} \,,$$

oder einfacher

$$X_1 + \sum_{i=2}^{i=n} . J_{1,i} \cos\alpha_1 \quad , \quad Y + \sum_{i=2}^{i=n} . J_{1,i} \cos\beta_1 \quad , \quad Z + \sum_{i=2}^{i=n} . J_{1,i} \cos\gamma_1 \,.$$

für den Punkt M_2 werden diese Componenten

$$X_2 - J_{1,2} \cos\alpha_{1,2} + J_{2,3} \cos\alpha_{2,3} + \text{etc.} + J_{2,n} \cos\alpha_{2,n} \,,$$

$$Y_2 - J_{1,2} \cos\beta_{1,2} + J_{2,3} \cos\beta_{2,3} + \text{etc.} + J_{2,n} \cos\beta_{2,n} \,,$$

$$Z_2 - J_{1,2} \cos\gamma_{1,2} + J_{2,3} \cos\gamma_{2,3} + \text{etc.} + J_{2,n} \cos\gamma_{2,n} \,,$$

für den Punkt M_3

$$X_3 - J_{1,3} \cos \alpha_{1,3} - J_{2,3} \cos \alpha_{2,3} + J_{3,4} \cos \alpha_{3,4} + \text{etc.} + J_{3,n} \cos \alpha_{3,n} ,$$

$$Y_3 - J_{1,3} \cos \beta_{1,3} - J_{2,3} \cos \beta_{2,3} + J_{3,4} \cos \beta_{3,4} + \text{etc.} + J_{3,n} \cos \beta_{3,n} ,$$

$$Z_3 - J_{1,3} \cos \gamma_{1,3} - J_{2,3} \cos \gamma_{2,3} + J_{3,4} \cos \gamma_{3,4} + \text{etc.} + J_{3,n} \cos \gamma_{3,n} ,$$

und man wird durch weitere Fortsetzung dieser Zusammensetzung der drei Hauptcomponenten leicht finden, daß dieselben für den Punkt M_i die Form annehmen

$$X_i - J_{1,i} \cos \alpha_{1,i} - J_{2,i} \cos \alpha_{2,i} - \text{etc.}$$
$$+ J_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} + J_{i,i+2} \cos \alpha_{i,i+2} + \text{etc.} + J_{i,n} \cos \alpha_{i,n} ,$$

$$Y_i - J_{1,i} \cos \beta_{1,i} - J_{2,i} \cos \beta_{2,i} - \text{etc.}$$
$$+ J_{i,i+1} \cos \beta_{i,i+1} + J_{i,i+2} \cos \beta_{i,i+2} + \text{etc.} + J_{i,n} \cos \beta_{i,n} ,$$

$$Z_i - J_{1,i} \cos \gamma_{1,i} - J_{2,i} \cos \gamma_{2,i} - \text{etc.}$$
$$+ J_{i,i+1} \cos \gamma_{i,i+1} + J_{i,i+2} \cos \gamma_{i,i+2} + \text{etc.} + J_{i,n} \cos \gamma_{i,n} .$$

Mit Einführung von Summenzeichen erhält man daher die einfachen Ausdrücke:

$$\left\{ \begin{array}{l} X_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} , \\ Y_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} , \\ Z_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} , \end{array} \right.$$

durch welche sich die fördernde Gesammtwirkung für jeden einzelnen Punkt des Systems bestimmen läßt.

Um aber die innern Zustände der einzelnen Punkte beurtheilen zu können, muß dieser Gesammtwirkung, nach den in §. 117 des ersten Buches abgeleiteten Gesetzen für die relative Bewegung eines materiellen Punktes in Bezug auf ein parallel fortschreitendes Coordinatensystem, noch eine Kraft hinzugefügt werden, welche den betreffenden Punkt M_i im Zustande des äußern Gleichgewichtes erhalten oder ihm eine seiner äußern Geschwindigkeit gleiche und entgegengesetzte Geschwindigkeit ertheilen würde; die Componenten dieser Kraft sind offenbar

$$- m_i \frac{d^2 X}{dt^2} , \quad - m_i \frac{d^2 Y}{dt^2} , \quad - m_i \frac{d^2 Z}{dt^2} ,$$

oder nach §. 10

$$-\frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . X \quad , \quad -\frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Y \quad , \quad -\frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z \, ,$$

und man hat demnach als fördernde Componenten der relativen oder innern Gesammtwirkung aller auf den Punkt M_i wirkenden Kräfte die Werthe:

$$\left.\begin{array}{l}
X_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . X \\
Y_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Y \\
Z_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z
\end{array}\right\} ,$$

Soll sich nun das System im Zustande des innern Gleichgewichtes befinden, so muß jeder einzelne Punkt im Gleichgewicht sein, es müssen daher für einen jeden die drei Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}
X_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . X - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} = 0 \\
Y_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Y - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} = 0 \\
Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} = 0
\end{array}\right\} (45.$$

erfüllt werden. Wir erhalten also im Ganzen $3n$ Bedingungen, durch welche man die $3n$ Coordinaten $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, u. s. f. sämmtlicher Punkte, oder die Gestalt des Systems für das innere Gleichgewicht wird bestimmen können.

Werden diese Bedingungen nicht erfüllt, so findet innere Bewegung statt und es werden dann $3n$ Gleichungen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l}
m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . X - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \\
m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Y - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \\
m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k}
\end{array}\right\} (46.$$

dazu dienen, die Bewegung eines jeden der n Punkte zu bestimmen, wenn die anfängliche Lage und Geschwindigkeit für einen jeden gegeben ist. Diese Gleichungen ergeben sich direct aus denen für die absolute Bewegung des Punktes M_i, wenn man denselben für sich allein, aber der Gesammtwirkung sämmtlicher äußeren und inneren Kräfte unterworfen betrachtet, deren Componenten durch die Werthe (45) gegeben sind; denn die Coordinaten jenes Punktes am Ende der Zeit t in Bezug auf die festen Achsen sind offenbar

$$\mathfrak{X} + x_i \quad , \quad \mathfrak{Y} + y_i \quad , \quad \mathfrak{Z} + z_i \; ;$$

man hat daher für die absolute Bewegung desselben die Gleichungen:

$$\left\{ \begin{aligned} m_i \frac{d^2 \mathfrak{X}}{d t^2} + m_i \frac{d^2 x_i}{d t^2} &= X_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \, , \\ m_i \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{d t^2} + m_i \frac{d^2 y_i}{d t^2} &= Y_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \, , \\ m_i \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d t^2} + m_i \frac{d^2 z_i}{d t^2} &= Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} \, , \end{aligned} \right.$$

aus welchen die Gleichungen (48) hervorgehen, wenn man für die Aenderungsgesetze $\frac{d^2 \mathfrak{X}}{d t^2}$, $\frac{d^2 \mathfrak{Y}}{d t^2}$, $\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{d t^2}$ die aus den Gleichungen (12) (§. 10) für die äußere fortschreitende Bewegung sich ergebenden Werthe einführt.

In manchen Fällen dürfte es zweckmäßiger sein, nicht gerade den Mittelpunkt der Masse, sondern einen andern Punkt des Systems, z. B. den Punkt M_1, als Anfangspunkt zu wählen. Bezeichnen wir für diesen Fall die Masse des genannten Punktes mit $\mathfrak{m}_1$, seine Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen mit $\mathfrak{x}_1$, $\mathfrak{y}_1$, $\mathfrak{z}_1$, so hat man für die Bewegung dieses Punktes in Bezug auf dieselben Achsen die Gleichungen:

$$\mathfrak{m}_1 \frac{d^2 \mathfrak{x}_1}{d t^2} = X_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos \alpha_{1,k} \, , \quad \mathfrak{m}_1 \frac{d^2 \mathfrak{y}_1}{d t^2} = Y_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos \beta_{1,k} \, ,$$

$$\mathfrak{m}_1 \frac{d^2 \mathfrak{z}_1}{d t^2} = Z_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . J_{1,k} \cos \gamma_{1,k} \; ;$$

die Coordinaten eines beliebigen Punktes M_i im System sind dann $\mathfrak{x}_1 + x_i'$, $\mathfrak{y}_1 + y_i'$, $\mathfrak{z}_1 + z_i'$ und die Gleichungen seiner innern Bewegung in Bezug auf parallel bleibende Achsen sind daher

$$\left.\begin{array}{l} m_i \frac{d^2 x_i'}{dt^2} = X_i - m_i \frac{d^2 x_1}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 y_i'}{dt^2} = Y_i - m_i \frac{d^2 y_1}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 z_i'}{dt^2} = Z_i - m_i \frac{d^2 z_1}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\gamma_{i,k} \end{array}\right\} (48.$$

und nehmen mit den vorhergehenden Werthen von $\frac{d^2 x_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2}$ die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} m_i \frac{d^2 x_i'}{dt^2} = X_i - \frac{m_i}{m_1} (X_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . \; J_{1,k} \cos\alpha_{1,k}) \\ \qquad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 y_i'}{dt^2} = Y_i - \frac{m_i}{m_1} (Y_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . \; J_{1,k} \cos\beta_{1,k}) \\ \qquad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 z_i'}{dt^2} = Z_i - \frac{m_i}{m_1} (Z_1 + \sum_{k=2}^{k=n} . \; J_{1,k} \cos\gamma_{1,k}) \\ \qquad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos\gamma_{i,k} \end{array}\right\} (48.$$

Die Bedingungen für das innere Gleichgewicht müssen offenbar dieselben bleiben wie früher, und da man für diesen Fall die Bedingungen $\frac{d^2 x_1}{dt^2} = \frac{d^2 X}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_1}{dt^2} = \frac{d^2 Y}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_1}{dt^2} = \frac{d^2 Z}{dt^2}$ hat, so wird man leicht von den Gleichungen (47) auf die Gleichungen (45) zurückschließen.

In dem besondern Falle, wo die äußern Kräfte X, Y, Z den Massen der einzelnen Punkte proportional, und daher entweder constant oder blos Functionen der Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunktes der Masse sind, so daß man hat

$X_i = m_i f_x(X, Y, Z)$, $Y_i = m_i f_y(X, Y, Z)$, $Z_i = m_i f_z(X, Y, Z)$,

nehmen die Componenten der äußern Resultirenden die Form an:

$\Sigma.X = f_x(X, Y, Z)\Sigma.m$, $\Sigma.Y = f_y(X, Y, Z)\Sigma.m$, $\Sigma.Z = f_z(Y, X, Z)\Sigma.m$;

in diesem Falle werden daher die Gleichungen für die innere Bewegung unabhängig von den äußern Kräften, und man findet einfach

$$49.)\quad\left\{\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} \end{aligned}\right.$$

als Gleichungen der innern Bewegung in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse, während die Gleichungen (48) für die innere Bewegung in Bezug auf den Punkt M_1 die Form annehmen

$$50.)\quad\left\{\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} - \frac{m_i}{m_1} \sum_{k=2}^{k=n} . \, J_{1,k} \cos \alpha_{1,k} \\ m_i \frac{d^2 y_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} - \frac{m_i}{m_1} \sum_{k=2}^{k=n} . \, J_{1,k} \cos \beta_{1,k} \\ m_i \frac{d^2 z_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} - \frac{m_i}{m_1} \sum_{k=2}^{k=n} . \, J_{1,k} \cos \gamma_{1,k}. \end{aligned}\right.$$

Aus diesen Gleichungen ergeben sich leicht die Bedingungen für das innere Gleichgewicht des Systems, wenn man darin $\frac{d^2 x_i'}{dt^2}$, $\frac{d^2 y_i'}{dt^2}$, $\frac{d^2 z_i'}{dt^2}$ gleich Null setzt.

§. 31.

Beziehen wir nun die Bewegung der einzelnen Punkte auf ein Coordinatensystem der ξ, η, ζ, dessen Anfangspunkt wieder der Mittelpunkt der Masse des Systems ist, welches aber neben der fortschreitenden Bewegung dieses Punktes zugleich eine bekannte drehende Bewegung besitzt, so daß die Winkel ω, ϑ und ψ, durch welche die Richtung dieser sich drehenden Achsen in Bezug auf die festen bestimmt wird, in Function der Zeit gegeben sind.

Für diesen Fall zerlegen wir die an dem Punkte M_i thätige äußere Resultirende R_i nach den sich drehenden Achsen der ξ, η, ζ und bezeichnen die entsprechenden Componenten derselben mit Ξ_i, H_i, Z_i; ebenso zerlegen wir jede der innern Kräfte J nach diesen Achsen und bezeichnen deren Componenten durch $J \cos \lambda$, $J \cos \mu$, $J \cos \nu$, so daß

Man nun für die entsprechenden Componenten der Gesammtwirkung aller an M_i thätigen Kräfte die Ausdrücke erhält:

$$\left.\begin{array}{l} \Xi_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \lambda_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \lambda_{i,k} ; \\ H_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \mu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \mu_{i,k} ; \\ Z_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \nu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \nu_{i,k} \end{array}\right\} .$$

Wir haben dann auch für die zu denselben Achsen der ξ, η und ζ parallelen Componenten der aus den fördernden Kräften

$$m_i \frac{d^2 X}{dt^2} = \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . X \;,\quad m_i \frac{d^2 Y}{dt^2} = \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Y \;,\quad m_i \frac{d^2 Z}{dt^2} = \frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z$$

sich ergebenden Resultirenden, welche die äußere fortschreitende Bewegung des Punktes M_i zu erzeugen vermag, die Werthe: $\frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . \Xi$, $\frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . H$, $\frac{m_i}{\Sigma . m} \Sigma . Z$, und es bleibt uns noch zufolge der in §§. 118 und 119 des ersten Buches abgeleiteten Gesetze die Kraft zu bestimmen, welche als Ursache für die Aenderung der drehenden Bewegung eines Punktes von der Masse m_i betrachtet werden kann, der am Ende der Zeit t dieselbe Lage hat, wie der Punkt M_i, dessen Coordinaten also ξ_i, η_i, ζ_i sind und der von diesem Augenblicke an mit den Achsen der ξ, η, und ζ fest verbunden bleibt. Bezeichnen wir die zu diesen Achsen parallelen Componenten dieser Kraft mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{Z}$, so haben wir zur Bestimmung derselben nach §. 189 des zweiten Buches oder nach §. 14 im vorhergehenden Abschnitte, wenn daselbst ξ, η und ζ als unveränderlich genommen und die Werthe von u_ξ, u_η und u_ζ in die Gleichungen (g) eingeführt werden, die Beziehungen:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{X}_i = m_i \left(\zeta_i \frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta_i \frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \mathfrak{p} (\mathfrak{q} \eta_i + \mathfrak{r} \zeta_i) - (\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2) \xi_i \right) \\ \mathfrak{Y}_i = m_i \left(\xi_i \frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \zeta_i \frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{q} (\mathfrak{p} \xi_i + \mathfrak{r} \zeta_i) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{r}^2) \eta_i \right) \\ \mathfrak{Z}_i = m_i \left(\eta_i \frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi_i \frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{r} (\mathfrak{p} \xi_i + \mathfrak{q} \eta_i) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2) \zeta_i \right) \end{array}\right\} , \text{(a.}$$

worin $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, wie an den genannten Orten die Componenten d augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit φ des Coordinatensystems de ξ, η, ζ vorstellen, und durch die aus den Gleichungen:

$$\left\{\begin{aligned} \mathfrak{p} &= -\frac{d\omega}{dt}\cos\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\sin\psi \\ \mathfrak{q} &= \frac{d\omega}{dt}\sin\psi\sin\vartheta + \frac{d\vartheta}{dt}\cos\psi \\ \mathfrak{r} &= \frac{d\omega}{dt}\cos\vartheta + \frac{d\psi}{dt} \end{aligned}\right.$$

sich ergebenden Werthe in Function von t zu ersetzen sind.

Endlich seien $\mathfrak{V}_i$ die innere Geschwindigkeit des Punktes M_i i Bezug auf die Achsen der ξ, η und ζ, und $\mathfrak{u}_i = \frac{d\xi_i}{dt}$, $\mathfrak{v}_i = \frac{d\eta_i}{dt}$, $\mathfrak{w}_i = \frac{d\zeta_i}{dt}$ ihre zu diesen Achsen parallelen Componenten, also

$$\frac{\mathfrak{u}_i}{\mathfrak{V}_i} = \cos\mathfrak{l}_i \quad , \quad \frac{\mathfrak{v}_i}{\mathfrak{V}_i} = \cos\mathfrak{m}_i \quad , \quad \frac{\mathfrak{w}_i}{\mathfrak{V}_i} = \cos\mathfrak{n}_i$$

die Cosinus der Winkel, welche ihre Richtung mit jenen Achsen einschließt; ferner seien p, q, r die Winkel, welche die augenblickliche Drehungsachse mit denselben Achsen bildet und für welche man hat

$$\cos p = \frac{\mathfrak{p}}{\varphi} \quad , \quad \cos q = \frac{\mathfrak{q}}{\varphi} \quad , \quad \cos r = \frac{\mathfrak{r}}{\varphi} ,$$

l_i, m_i, n_i die Winkel einer Geraden, welche auf den beiden ebenbestimmten Richtungen senkrecht steht, so daß sich die Beziehungen (Einl. §. 21):

$$\cos l_i = -\frac{\cos\mathfrak{m}_i\cos r - \cos\mathfrak{n}_i\cos q}{\sin\delta_i}, \quad \cos m_i = -\frac{\cos\mathfrak{n}_i\cos p - \cos\mathfrak{l}_i\cos r}{\sin\delta_i},$$

$$\cos n_i = -\frac{\cos\mathfrak{l}_i\cos q - \cos\mathfrak{m}_i\cos p}{\sin\delta_i},$$

oder

$$\cos l_i = -\frac{\mathfrak{v}_i\mathfrak{r} - \mathfrak{w}_i\mathfrak{q}}{\mathfrak{W}_i} \quad , \quad \cos m_i = -\frac{\mathfrak{w}_i\mathfrak{p} - \mathfrak{u}_i\mathfrak{r}}{\mathfrak{W}_i} ,$$

$$\cos n_i = -\frac{\mathfrak{u}_i\mathfrak{q} - \mathfrak{v}_i\mathfrak{p}}{\mathfrak{W}_i}$$

gegeben, worin die Wurzelgröße

$$\sqrt{(\mathfrak{u}_i\,\mathfrak{q} - \mathfrak{v}_i\,\mathfrak{p})^2 + (\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{p} - \mathfrak{u}_i\,\mathfrak{r})^2 + (\mathfrak{v}_i\,\mathfrak{r} - \mathfrak{w}_i\,\mathfrak{q})^2}\,,$$

durch $\mathfrak{W}_i$ ersetzt ist. $F_i = 2\,m_i\,\mathfrak{W}_i$ sei dann die Kraft, welche dem Punkte M_i in der Einheit der Zeit die Beschleunigung $2\,\mathfrak{W}_i$ zu ertheilen vermag, die von der Winkelgeschwindigkeit φ des Coordinatensystems und der innern Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_i$ abhängt und für die man auch noch die Beziehung hat

$$2\,\mathfrak{W}_i = 2\,\varphi\,\mathfrak{V}_i \sin \delta_i\,,$$

wenn δ_i den Winkel bezeichnet, welchen die augenblickliche Drehungs-Achse mit der Richtung der innern Geschwindigkeit $\mathfrak{V}_i$ bildet; die Componenten $F_i \cos l_i$, $F_i \cos m_i$, $F_i \cos n_i$ dieser Kraft werden demnach die Werthe annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
F_i \cos l_i &= -2\,m_i(\mathfrak{v}_i\,\mathfrak{r} - \mathfrak{w}_i\,\mathfrak{q}) = -2\,m_i\left(\mathfrak{r}\,\frac{d\eta_i}{dt} - \mathfrak{q}\,\frac{d\zeta_i}{dt}\right)\\
F_i \cos m_i &= -2\,m_i(\mathfrak{w}_i\,\mathfrak{p} - \mathfrak{u}_i\,\mathfrak{r}) = -2\,m_i\left(\mathfrak{p}\,\frac{d\zeta_i}{dt} - \mathfrak{r}\,\frac{d\xi_i}{dt}\right)\\
F_i \cos n_i &= -2\,m_i(\mathfrak{u}_i\,\mathfrak{q} - \mathfrak{v}_i\,\mathfrak{p}) = -2\,m_i\left(\mathfrak{q}\,\frac{d\xi_i}{dt} - \mathfrak{p}\,\frac{d\eta_i}{dt}\right)
\end{aligned}\right\} \quad (b.$$

Mit diesen Bezeichnungen und Werthen erhalten wir für die relative oder innere Bewegung des Punktes M_i die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
m_i\,\frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \Xi_i - \frac{m_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.\Xi - \mathfrak{X}_i + F_i \cos l_i\\
&\quad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \,J_{h,i} \cos \lambda_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \,J_{i,k} \cos \lambda_{i,k}\\
m_i\,\frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= H_i - \frac{m_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.H - \mathfrak{Y}_i + F_i \cos m_i\\
&\quad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \,J_{h,i} \cos \mu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \,J_{i,k} \cos \mu_{i,k}\\
m_i\,\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= Z_i - \frac{m_i}{\Sigma.m}\,\Sigma\,Z - \mathfrak{Z}_i + F_i \cos n_i\\
&\quad - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \,J_{h,i} \cos \nu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \,J_{i,k} \cos \nu_{i,k}
\end{aligned}\right\} ,\ (51.$$

und so immer drei von derselben Form für jeden andern Punkt, also wieder 3n Gleichungen zur Bestimmung der 3n Coordinaten ξ, η, ζ aller Punkte des Systems.

Soll dieses System in Bezug auf die sich drehenden Achsen im ruhenden Gleichgewichte bleiben, so muß $\mathfrak{V}_i$ also auch $\mathfrak{W}_i$ und F_i für alle Punkte Null sein, und man hat demnach wieder 3n Bedingungen von der Form:

$$52.)\quad \left\{\begin{array}{l} \Xi_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . \Xi - \mathfrak{X}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\lambda_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\lambda_{i,k} = 0, \\ H_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . H - \mathfrak{Y}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\mu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\mu_{i,k} = 0, \\ Z_i - \frac{m_i}{\Sigma . m}\Sigma . Z - \mathfrak{Z}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\nu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\nu_{i,k} = 0, \end{array}\right.$$

durch welche die Gleichgewichtslage jedes einzelnen Punktes und damit die entsprechende Gestalt des Systems bestimmt werden kann.

Befindet sich das System im Zustande des äußern Gleichgewichtes oder besitzt nur eine geradlinige gleichförmige fortschreitende Bewegung, so kommen die vorhergehenden Gleichungen (48) und (49) für die innere Bewegung des Punktes M_i auf die einfachern

$$53.)\quad \left\{\begin{array}{l} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = X_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = Y_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\ m_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = Z_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\gamma_{i,k} \end{array}\right.$$

zurück, da in den erstern die Kräfte $\Sigma . X$, $\Sigma . Y$ und $\Sigma . Z$, in den letztern die Kräfte $\Sigma . \Xi$, $\Sigma . H$, $\Sigma . Z$, $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$ und F_i Null werden und die Coordinaten ξ_i, η_i, ζ_i mit x_i, y_i, z_i, die Componenten Ξ_i, H_i, Z_i mit X_i, Y_i, Z_i gleichbedeutend sind. Ebenso werden die Bedingungen für das innere Gleichgewicht des Punktes M_i einfach folgende:

$$\left.\begin{array}{l}
X_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} = 0 \\
Y_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} = 0 \\
Z_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} = 0
\end{array}\right\} \quad (54.$$

und wenn diese Bedingungen und jene Gleichungen wieder für jeden einzelnen Punkt des Systems hergestellt sind, so werden dadurch einerseits die Gestalt, in welcher das System im Gleichgewicht bleiben kann, und anderseits die Gesetze der innern Bewegung desselben bestimmt werden können.

In dem besondern Falle endlich, wo das System eine drehende Bewegung um eine feste Achse besitzt, wird man diese als eine der Coordinaten-Achsen der ξ, η oder ζ, z. B. als die der ζ nehmen, und die Ebenen der $\xi\eta$ und $\xi\zeta$ durch einen bestimmten Punkt derselben legen; man hat dann einen festen Anfangspunkt und die fördernden Wirkungen $\Sigma.\Xi$, $\Sigma.H$, $\Sigma.Z$, welche auch die Widerstände N gegen die fortschreitende und drehende Bewegung der Achse in sich begreifen, werden Null; ferner werden die Componenten $\mathfrak{p}$ und $\mathfrak{q}$ der Winkelgeschwindigkeit φ des Systems Null, und $\mathfrak{r}$ gleich φ selbst, also auch $\cos \mathrm{p} = \cos \mathrm{q} = 0$, $\cos \mathrm{r} = 1$. Man findet damit für die Kräfte $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$ die Werthe:

$$\mathfrak{X}_i = -m_i \eta_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \xi_i \varphi^2 \quad , \quad \mathfrak{Y}_i = m_i \xi_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \eta_i \varphi^2 \quad , \quad \mathfrak{Z}_i = 0 \; ;$$

für die Componente $\mathfrak{W}_i$ ergibt sich

$$\mathfrak{W}_i = \varphi \sqrt{\mathfrak{x}_i^2 + \mathfrak{y}_i^2} = \varphi \, \mathfrak{V}_i \sin \mathfrak{u}_i \; ;$$

die Cosinus der Richtungswinkel der Kraft $F_i = 2\, m_i \mathfrak{W}_i$ werden aber

$$\cos \mathrm{l}_i = -\varphi \frac{\mathfrak{y}_i}{\mathfrak{W}_i} \quad , \quad \cos \mathrm{m}_i = +\varphi \frac{\mathfrak{x}_i}{\mathfrak{W}_i} \quad , \quad \cos \mathrm{n}_i = 0$$

und ihre Componenten sind demnach

$$F_i \cos \mathrm{l}_i = -2 m_i \varphi \frac{d\eta_i}{dt} \; , \quad F_i \cos \mathrm{m}_i = +2 m_i \varphi \frac{d\xi_i}{dt} \; , \quad F_i \cos \mathrm{n}_i = 0 \, .$$

Mit diesen Werthen nehmen die Gleichungen (51) für die innere Bewegung des Punktes M_i die Form an:

$$
55.)\left\{\begin{aligned}
m_i \frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \Xi_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \\
&\quad + m_i \eta_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \xi_i \varphi^2 - 2 m_i \varphi \frac{d\eta_i}{dt}, \\
m_i \frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= H_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \\
&\quad + m_i \xi_i \frac{d\varphi}{dt} - m_i \eta_i \varphi^2 + 2 m_i \varphi \frac{d\xi_i}{dt}, \\
m_i \frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\gamma_{i,k},
\end{aligned}\right.
$$

und werden noch etwas einfacher für den Fall, wo die drehende Bewegung in eine gleichförmige übergeht, $\frac{d\varphi}{dt}$ also Null wird. Für das ruhende Gleichgewicht zieht man daraus unter der letztern Voraussetzung und mit der Beachtung, daß für diesen Zustand auch $\frac{d\xi_i}{dt}$ und $\frac{d\eta_i}{dt}$ Null werden müssen, die Bedingungen:

$$
56.)\left\{\begin{aligned}
&\Xi_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} - m_i \xi_i \varphi^2 = 0, \\
&H_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\beta_{i,k} - m_i \eta_i \varphi^2 = 0, \\
&Z_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\gamma_{i,k} = 0,
\end{aligned}\right.
$$

welche auf alle Punkte des Systems ausgedehnt dessen Gestalt in dem betreffenden Falle bestimmen werden.

§. 32.

In gleicher Weise wollen wir nun die innern Zustände eines veränderlichen Systems, welches aus einer gegebenen Anzahl von festen Körpern besteht, deren Größe, Gestalt und Masse als bekannt vorausgesetzt wird und welche auf irgend eine Weise auf einander wirken oder zwischen denen beliebige Kräfte thätig sind, durch Gleichungen ausdrücken.

Diese Körper wollen wir, um sie zu benennen, mit A_1, A_2, A_i, u. s. f. bezeichnen; die Masse des Körpers A_i sei M_i; die Coordinaten ihres Mittelpunktes in Bezug auf parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems ist, x_i, y_i, z_i, in Bezug auf ein Coordinatensystem, das denselben Anfangspunkt hat, aber eine gegebene drehende Bewegung besitzt, ξ_i, η_i, ζ_i; X_i, Y_i, Z_i seien die zu den parallel fortschreitenden Achsen parallelen Componenten der äußern fördernden Wirkung, welche von materiellen Punkten außerhalb des Systems auf den Körper A_i ausgeübt wird, Ξ_i, H_i, Z_i die Componenten derselben fördernden Wirkung nach den sich drehenden Achsen; ferner seien $J_{1,i}$, $J_{2,i}$, $J_{3,i}$, u. s. f. die fördernden Wirkungen, welche durch die zwischen den Massen M_1 und M_i, M_2 und M_i, M_3 und M_i, u. s. f. thätigen Kräfte in der Masse M_i hervorgerufen werden, $\pi - \alpha_{1,i}$, $\pi - \beta_{1,i}$, $\pi - \gamma_{1,i}$ seien die Richtungswinkel der Kraft $J_{1,i}$ gegen die parallel fortschreitenden Achsen, $\pi - \alpha_{2,i}$, $\pi - \beta_{2,i}$, $\pi - \gamma_{2,i}$ die der Kraft $J_{2,i}$, u. s. f., und allgemein $\pi - \alpha_{h,i}$, $\pi - \beta_{h,i}$, $\pi - \gamma_{h,i}$ die der fördernden Kraft $J_{h,i}$, wenn $h < i$; dagegen seien $\alpha_{i,i+1}$, $\beta_{i,i+1}$, $\gamma_{i,i+1}$ diese Richtungswinkel für die fördernde Kraft $J_{i,i+1}$, welche von der Masse M_{i+1} in M_i hervorgerufen wird, und so allgemein $\alpha_{i,k}$, $\beta_{i,k}$, $\gamma_{i,k}$ diese Winkel für die Richtung der fördernden Wirkung $J_{i,k}$, für welche $k > i$ ist. Die Winkel, welche dieselben Kräfte J mit den sich drehenden Achsen bilden, wollen wir in ähnlicher Weise durch die Buchstaben λ, μ, ν bezeichnen, so daß $\pi - \lambda_{h,i}$, $\pi - \mu_{h,i}$, $\pi - \nu_{h,i}$ diese Winkel für die an M_i thätige Kraft $J_{h,i}$, und $\lambda_{i,k}$, $\mu_{i,k}$, $\nu_{i,k}$ die entsprechenden für die an M_i angreifende fördernde Kraft $J_{i,k}$ vorstellen. Mit diesen Bezeichnungen erhalten die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung des Körpers A_i oder vielmehr des Mittelpunktes seiner Masse in Bezug auf die parallel bleibenden Coordinaten-Achsen und den Mittelpunkt der Masse des Systems, dessen Coordinaten in Bezug auf die festen Achsen immer wieder $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$, $\mathbf{Z}$ seien, dieselbe Form, wie die Gleichungen (46), und man hat demnach

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i - M_i \frac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i - M_i \frac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \beta_{i,k} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= Z_i - M_i \frac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \; J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . \; J_{i,k} \cos \gamma_{i,k}
\end{aligned}\right\} \quad (57.$$

Bezeichnen wir dann weiter die Winkel, welche die sich drehenden Coordinaten-Achsen der ξ, η, ζ im Mittelpunkt der Masse des Systems mit den festen Achsen am Ende der Zeit t einschließen mit $\widehat{\omega}$, $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\psi}$, die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit dieses Coordinatensystems mit $\widehat{\varphi}$, und die zu den beweglichen Achsen parallelen Componenten derselben mit $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$, so daß wir wieder die Beziehungen:

$$
\text{a.)}\quad \left\{
\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{p}} &= -\frac{d\widehat{\omega}}{dt}\cos\widehat{\psi}\sin\widehat{\vartheta} + \frac{d\widehat{\vartheta}}{dt}\sin\widehat{\psi}\,, \\
\widehat{\mathfrak{q}} &= \frac{d\widehat{\omega}}{dt}\sin\widehat{\psi}\sin\widehat{\vartheta} + \frac{d\widehat{\vartheta}}{dt}\cos\widehat{\psi}\,, \\
\widehat{\mathfrak{r}} &= \frac{d\widehat{\omega}}{dt}\cos\widehat{\vartheta} + \frac{d\widehat{\psi}}{dt}\,,
\end{aligned}
\right.
$$

und für die Winkel $\widehat{\mathrm{p}}$, $\widehat{\mathrm{q}}$, $\widehat{\mathrm{r}}$, welche die augenblickliche Drehungsachse des Coordinatensystems der ξ, η, ζ mit diesen Achsen selbst bildet, die Gleichungen:

$$
\cos\widehat{\mathrm{p}} = \frac{\widehat{\mathfrak{p}}}{\widehat{\varphi}}\,,\qquad \cos\widehat{\mathrm{q}} = \frac{\widehat{\mathfrak{q}}}{\widehat{\varphi}}\,,\qquad \cos\widehat{\mathrm{r}} = \frac{\widehat{\mathfrak{r}}}{\widehat{\varphi}}\,,
$$

erhalten, und lassen wir die Bezeichnungen $\mathfrak{X}_i$, $\mathfrak{Y}_i$, $\mathfrak{Z}_i$, $\mathfrak{V}_i$, $\mathfrak{u}_i$, $\mathfrak{v}_i$, $\mathfrak{w}_i$, $\mathfrak{W}_i$, F_i, l_i, m_i, n_i des vorhergehenden Paragraphen für die dem Mittelpunkte der Masse M_i zukommenden entsprechenden Größen bestehen, so werden die Gleichungen für die fortschreitende Bewegung dieses Mittelpunktes in Bezug auf die sich drehenden Achsen übereinstimmend mit den Gleichungen (51) die Form annehmen:

$$
(58)\quad \left\{
\begin{aligned}
M_i\frac{d^2\xi_i}{dt^2} &= \varXi_i - \frac{M_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.\varXi - \mathfrak{X}_i + F_i\cos l_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i}\cos\lambda_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k}\cos\lambda_{i,k} \\
M_i\frac{d^2\eta_i}{dt^2} &= H_i - \frac{M_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.H - \mathfrak{Y}_i + F_i\cos m_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i}\cos\mu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k}\cos\mu_{i,k} \\
M_i\frac{d^2\zeta_i}{dt^2} &= Z_i - \frac{m_i}{\Sigma.m}\,\Sigma.Z - \mathfrak{Z}_i + F_i\cos n_i - \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i}\cos\nu_{h,i} + \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k}\cos\nu_{i,k}\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Wenn der Mittelpunkt der Masse des Körpers A_1 als Anfang der parallel beweglichen Achsen genommen werden soll, so ergeben sich für die innere fortschreitende Bewegung des Körpers A_i in Bezug auf diese Achsen Gleichungen von derselben Form, wie die Gleichungen (47) und (48) und diese und die Gleichungen (57) kommen wieder auf Gleichungen von der Form der Gleichungen (49) und (50) zurück, wenn die äußern fördernden Kräfte X_i, Y_i, Z_i nur Functionen von der Masse M_i des betreffenden Körpers A_i und von den Coordinaten X, Y, Z des Mittelpunktes der Masse des ganzen Systems werden.

Diese letztere Annahme begreift natürlich auch als besondern Fall diese in sich, daß die äußern fördernden Kräfte X_i, Y_i, Z_i Null sind und das System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, oder eine gleichförmige geradlinige fortschreitende Bewegung besitzt. Im Allgemeinen tritt aber dieser äußere Zustand ein, nicht nur, wenn die Kräfte X_i, Y_i, Z_i einzeln Null sind, sondern auch, wenn die Resultirenden $\Sigma.X$, $\Sigma.Y$, $\Sigma.Z$ fortwährend Null sind und bleiben; in diesem Falle sind es dann die den Gleichungen (53) entsprechenden, welche die innere fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse M_i ausdrücken.

§. 33.

Um ebenso die Gesetze der innern drehenden Bewegung des gegebenen Systems beziehungsweise eines jeden der festen Körper, aus denen es besteht, in Gleichungen darzustellen, denken wir uns durch den Mittelpunkt der Masse des Körpers A_i die drei Hauptachsen gezogen, und die Massemomente $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dieses Körpers in Bezug auf diese Achsen bestimmt. Seien dann ferner $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ die um dieselben Achsen drehenden Componenten der augenblicklichen Winkelgeschwindigkeit ω_i desselben um seine augenblickliche Drehungsachse, $M_i^{(\xi)}$, $M_i^{(\eta)}$, $M_i^{(\zeta)}$ die in gleicher Weise drehenden Wirkungen, welche von außerhalb des Systems liegenden Punkten oder Körpern auf den Körper A_i ausgeübt werden, $\mathfrak{J}_{1,i}^{(\xi)}$, $\mathfrak{J}_{1,i}^{(\eta)}$, $\mathfrak{J}_{1,i}^{(\zeta)}$ die denselben Achsen entsprechenden Componenten der von dem Körper A_1 auf A_i ausgeübten innern drehenden Wirkung, also $\mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)}$ die von der gegenseitigen Wirkung der Körper A_h und A_i herrührenden und an A_i angreifenden Momente, u. s. f. Endlich werden wir die Winkel, welche die Lage der natürlichen Drehungsachsen der Masse M_i in Bezug auf die festen oder in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen feststellen, mit [illegible], [illegible]

bezeichnen, und haben dann mit Beachtung der im §. 221 des zweiten Buches ausgesprochenen Bemerkung, daß die relative drehende Bewegung eines festen Systems in Bezug auf parallel fortschreitende Achsen dieselbe ist, wie in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, einerseits die Gleichungen:

$$59.)\quad \begin{cases} \mathfrak{A}_i \dfrac{d\mathfrak{p}_i}{dt} = (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\, \mathfrak{q}_i\, \mathfrak{r}_i + M_i^{(\xi)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)} \\ \mathfrak{B}_i \dfrac{d\mathfrak{q}_i}{dt} = (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\, \mathfrak{p}_i\, \mathfrak{r}_i + M_i^{(\eta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)} \\ \mathfrak{C}_i \dfrac{d\mathfrak{r}_i}{dt} = (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)\, \mathfrak{p}_i\, \mathfrak{q}_i + M_i^{(\zeta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} \mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)} \end{cases}$$

als Aenderungsgesetze der Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$, und diese sind dann anderseits wieder mit den Beziehungen:

$$60.)\quad \begin{cases} \mathfrak{p}_i = -\dfrac{d\omega_i}{dt} \cos\psi_i \sin\vartheta_i + \dfrac{d\vartheta_i}{dt} \sin\psi_i \\ \mathfrak{q}_i = \dfrac{d\omega_i}{dt} \sin\psi_i \sin\vartheta_i + \dfrac{d\vartheta_i}{dt} \cos\psi_i \\ \mathfrak{r}_i = \dfrac{d\omega_i}{dt} \cos\vartheta_i + \dfrac{d\psi_i}{dt} \end{cases}$$

zu verbinden, um die Lage jener natürlichen Drehungsachsen gegen die parallel beweglichen Coordinatenachsen zu bestimmen.

Soll dagegen die drehende Bewegung der einzelnen Körper gegen ein sich drehendes Coordinatensystem untersucht werden, so werden wir die Winkel, durch welche die Lage der Achsen dieses letztern gegen feste oder parallel fortschreitende Achsen in Function der Zeit ausgedrückt wird, durch $\overset{\frown}{\vartheta}$, $\overset{\frown}{\omega}$, $\overset{\frown}{\psi}$ bezeichnen, und mit ϑ_i', ω_i', ψ_i' die Winkel, welche die Lage der natürlichen Drehungsachsen des Körpers A_i gegen die sich drehenden Achsen der ξ, η, ζ in Function der Zeit bestimmen. Wir haben dann zwischen den ebengenannten Winkeln und den vorhergehenden, welche die Lage derselben Hauptachsen in Bezug auf parallel fortschreitende oder feste Coordinatenachsen feststellen, die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\cos\vartheta_1' &= \cos\vartheta_1\cos\widehat{\vartheta} + \sin\vartheta_1\sin\widehat{\vartheta}\cos(\omega_1-\widehat{\omega})\\ \cos\vartheta_1 &= \cos\vartheta_1'\cos\widehat{\vartheta} - \sin\vartheta_1'\sin\widehat{\vartheta}\cos(\omega_1'+\widehat{\psi})\\ \cos\widehat{\vartheta} &= \cos\vartheta_1'\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1'\sin\vartheta_1\cos(\psi_1-\psi_1')\end{aligned}\right\}, \quad (61.$$

welche sich einfach und unmittelbar aus dem sphärischen Dreieck $ZZ_,Z'$, Fig. 10, ergeben, wenn man beachtet, daß die drei Seiten $ZZ_,$, ZZ' und $Z_,Z'$ desselben entsprechende Bogen der Winkel $\widehat{\vartheta}$, ϑ_1 und ϑ_1' sind, und daß man für die drei Winkel Z, $Z_,$ und Z' dieses Dreiecks die Werthe hat:

$$Z = \omega_1 - \widehat{\omega}\ , \quad Z_, = \pi - (\omega_1' + \widehat{\psi})\ , \quad Z' = \psi_1 - \psi_1'\ .$$

In den meisten Fällen dürfte dann, wie schon am Ende des zweiten Buches ausgesprochen wurde, der einfachste Gang der Untersuchung dieser relativen Bewegung darin bestehen, daß man dieselbe zuerst unmittelbar in Bezug auf ein parallel fortschreitendes Coordinatensystem feststellt, also die Winkel ϑ_1, ω_1 und ψ_1 in Function der Zeit t ausdrückt, und dann mittels der vorhergehenden Beziehungen und den bekannten Functionen $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\omega}$ und $\widehat{\psi}$ die Winkel ϑ_1', ω_1' und ψ_1' in Bezug auf die sich drehenden Coordinaten-Achsen ableitet. Diese Ableitung bietet nicht die geringste Schwierigkeit, da man durch die erste der Gleichungen (61) direct den Winkel ϑ_1', und mit diesem aus der zweiten und dritten die Winkel ω_1' und ψ_1' berechnen kann.

Um indessen nichts zu wünschen übrig zu lassen, wollen wir hier auch die Gleichungen für die unmittelbare Untersuchung der relativen drehenden Bewegung in Bezug auf ein selbst in drehender Bewegung begriffenes Coordinatensystem ableiten.

Dazu seien $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die Coordinaten eines beliebigen Punktes m der Masse M_1 in Bezug auf die drei Hauptachsen im Mittelpunkte dieser Masse, ξ', η', ζ' seine Coordinaten in Bezug auf drei Achsen, welche den Anfangspunkt mit den vorhergehenden gemeinschaftlich haben und zu den sich drehenden Achsen parallel bleiben, und x, y, z seine Coordinaten in Bezug auf das mit demselben Mittelpunkte der Masse M_1 parallel zu festen Achsen fortschreitende Coordinatensystem. Ferner seien a, b, c die Cosinus der Winkel $\widehat{\mathfrak{x}x}$, $\widehat{\mathfrak{x}y}$, $\widehat{\mathfrak{x}z}$, welche die Achse der $\mathfrak{x}$

mit den Achsen der x, y, z bildet, a′, b′, c′ die der Winkel $\widehat{\mathfrak{y}x}, \widehat{\mathfrak{y}y}, \widehat{\mathfrak{y}z}$, welche die Achse der $\mathfrak{y}$, a″, b″, c″ die der Winkel $\widehat{\mathfrak{z}x}, \widehat{\mathfrak{z}y}, \widehat{\mathfrak{z}z}$, welche die Achse der $\mathfrak{z}$ mit denselben Achsen einschließt. Ebenso seien $\boldsymbol{\mathfrak{a}}, \boldsymbol{\mathfrak{b}}, \boldsymbol{\mathfrak{c}}, \boldsymbol{\mathfrak{a}}', \boldsymbol{\mathfrak{b}}', \boldsymbol{\mathfrak{c}}', \boldsymbol{\mathfrak{a}}'', \boldsymbol{\mathfrak{b}}'', \boldsymbol{\mathfrak{c}}''$ die Cosinus der Winkel, welche die Achsen der $\mathfrak{x}, \mathfrak{y}, \mathfrak{z}$ mit den sich drehenden Achsen der ξ', η', ζ' bilden, und $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}, \widehat{a'}, \widehat{b'}, \widehat{c'}, \widehat{a''}, \widehat{b''}, \widehat{c''}$ die Cosinus der Winkel zwischen den letztern Achsen der ξ', η', ζ' und den parallel fortschreitenden der x, y, z.

Man hat dann zwischen je neun dieser Cosinus, die sich auf dieselben Achsensysteme beziehen, die bekannten sechs Bedingungsgleichungen, welche ausdrücken, daß diese Achsensysteme rechtwinklige sind (Einl. §. 23). Zwischen den neun Coordinaten des Punktes m in Bezug auf die drei verschiedenen Coordinatensysteme bestehen aber auch die Beziehungen:

$$\text{a.)}\ \left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} x = a\mathfrak{x} + a'\mathfrak{y} + a''\mathfrak{z} \\ y = b\mathfrak{x} + b'\mathfrak{y} + b''\mathfrak{z} \\ z = c\mathfrak{x} + c'\mathfrak{y} + c''\mathfrak{z} \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} x = \widehat{a}\xi' + \widehat{a'}\eta' + \widehat{a''}\zeta' \\ y = \widehat{b}\xi' + \widehat{b'}\eta' + \widehat{b''}\zeta' \\ z = \widehat{c}\xi' + \widehat{c'}\eta' + \widehat{c''}\zeta' \end{array}\right\}, \\ \qquad\qquad \left.\begin{array}{l} \xi' = \boldsymbol{\mathfrak{a}}\mathfrak{x} + \boldsymbol{\mathfrak{a}}'\mathfrak{y} + \boldsymbol{\mathfrak{a}}''\mathfrak{z} \\ \eta' = \boldsymbol{\mathfrak{b}}\mathfrak{x} + \boldsymbol{\mathfrak{b}}'\mathfrak{y} + \boldsymbol{\mathfrak{b}}''\mathfrak{z} \\ \zeta' = \boldsymbol{\mathfrak{c}}\mathfrak{x} + \boldsymbol{\mathfrak{c}}'\mathfrak{y} + \boldsymbol{\mathfrak{c}}''\mathfrak{z} \end{array}\right\}; \end{array}\right.$$

durch Elimination von ξ', η' und ζ' aus den drei letzten und den drei mittleren ergeben sich für x, y und z die neuen Werthe:

$$\text{b.)}\ \left\{\begin{array}{l} x = (\widehat{a}\boldsymbol{\mathfrak{a}} + \widehat{a'}\boldsymbol{\mathfrak{b}} + \widehat{a''}\boldsymbol{\mathfrak{c}})\mathfrak{x} + (\widehat{a}\boldsymbol{\mathfrak{a}}' + \widehat{a'}\boldsymbol{\mathfrak{b}}' + \widehat{a''}\boldsymbol{\mathfrak{c}}')\mathfrak{y} \\ \qquad + (\widehat{a}\boldsymbol{\mathfrak{a}}'' + \widehat{a'}\boldsymbol{\mathfrak{b}}'' + \widehat{a''}\boldsymbol{\mathfrak{c}}'')\mathfrak{z} \\ y = (\widehat{b}\boldsymbol{\mathfrak{a}} + \widehat{b'}\boldsymbol{\mathfrak{b}} + \widehat{b''}\boldsymbol{\mathfrak{c}})\mathfrak{x} + (\widehat{b}\boldsymbol{\mathfrak{a}}' + \widehat{b'}\boldsymbol{\mathfrak{b}}' + \widehat{b''}\boldsymbol{\mathfrak{c}}')\mathfrak{y} \\ \qquad + (\widehat{b}\boldsymbol{\mathfrak{a}}'' + \widehat{b'}\boldsymbol{\mathfrak{b}}'' + \widehat{b''}\boldsymbol{\mathfrak{c}}'')\mathfrak{z} \\ z = (\widehat{c}\boldsymbol{\mathfrak{a}} + \widehat{c'}\boldsymbol{\mathfrak{b}} + \widehat{c''}\boldsymbol{\mathfrak{c}})\mathfrak{x} + (\widehat{c}\boldsymbol{\mathfrak{a}}' + \widehat{c'}\boldsymbol{\mathfrak{b}}' + \widehat{c''}\boldsymbol{\mathfrak{c}}')\mathfrak{y} \\ \qquad + (\widehat{c}\boldsymbol{\mathfrak{a}}'' + \widehat{c'}\boldsymbol{\mathfrak{b}}'' + \widehat{c''}\boldsymbol{\mathfrak{c}}'')\mathfrak{z} \end{array}\right.$$

und die Vergleichung der Coeffizienten von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ in diesen Gleichungen mit denen derselben Coordinaten in den drei ersten der Gleichungen (a) führt zu folgenden neun Bedingungsgleichungen:

$$\left.\begin{array}{l}\left.\begin{array}{l} a = \widehat{a}\,\mathfrak{a} + \widehat{a'}\,\mathfrak{b} + \widehat{a''}\,\mathfrak{c} \\ a' = \widehat{a}\,\mathfrak{a}' + \widehat{a'}\,\mathfrak{b}' + \widehat{a''}\,\mathfrak{c}' \\ a'' = \widehat{a}\,\mathfrak{a}'' + \widehat{a'}\,\mathfrak{b}'' + \widehat{a''}\,\mathfrak{c}'' \end{array}\right\}, \quad \left.\begin{array}{l} b = \widehat{b}\,\mathfrak{a} + \widehat{b'}\,\mathfrak{b} + \widehat{b''}\,\mathfrak{c} \\ b' = \widehat{b}\,\mathfrak{a}' + \widehat{b'}\,\mathfrak{b}' + \widehat{b''}\,\mathfrak{c}' \\ b'' = \widehat{b}\,\mathfrak{a}'' + \widehat{b'}\,\mathfrak{b}'' + \widehat{b''}\,\mathfrak{c}'' \end{array}\right\}, \\ \\ \qquad\quad \left.\begin{array}{l} c = \widehat{c}\,\mathfrak{a} + \widehat{c'}\,\mathfrak{b} + \widehat{c''}\,\mathfrak{c} \\ c' = \widehat{c}\,\mathfrak{a}' + \widehat{c'}\,\mathfrak{b}' + \widehat{c''}\,\mathfrak{c}' \\ c'' = \widehat{c}\,\mathfrak{a}'' + \widehat{c'}\,\mathfrak{b}'' + \widehat{c''}\,\mathfrak{c}'' \end{array}\right\} \end{array}\right\} \text{(c.}$$

Sind dann wie im vorhergehenden Paragraphen $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit $\widehat{\varphi}$ des Coordinatensystems der ξ, η, ζ, parallel zu diesen Achsen genommen, $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ die Componenten der Winkelgeschwindigkeit φ_i des Körpers A_i, um seine natürlichen Drehungsachsen für einen Beobachter, welcher dem parallel bleibenden Coordinatensystem angehört, $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{q}_i'$, $\mathfrak{r}_i'$ die Componenten der relativen Winkelgeschwindigkeit φ_i' desselben Körpers um dieselben Achsen für einen Beobachter, welcher an der Bewegung der Achsen der ξ, η, ζ Theil nimmt, so erhalten wir für diese neun Componenten aus je drei der Gleichungen (a) durch dieselbe Behandlung, welche mit den Gleichungen (a) in §. 184 des zweiten Buches vorgenommen wurde, und mit der Beachtung, daß zu diesem Zwecke in den drei mittlern der vorhergehenden Gleichungen (a) die Coordinaten ξ', η', ζ' als unveränderlich zu betrachten sind, d. h. als einem Punkte angehörig, welcher mit den Achsen der ξ, η, ζ fest verbunden bleibt, wie in §. 185 des vorhergehenden Buches die analytischen Werthe:

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{p}_i = a''\dfrac{da'}{dt} + b''\dfrac{db'}{dt} + c''\dfrac{dc'}{dt} = -\left(a'\dfrac{da''}{dt} + b'\dfrac{db''}{dt} + c'\dfrac{dc''}{dt}\right) \\ \mathfrak{q}_i = a\dfrac{da''}{dt} + b\dfrac{db''}{dt} + c\dfrac{dc''}{dt} = -\left(a''\dfrac{da}{dt} + b''\dfrac{db}{dt} + c''\dfrac{dc}{dt}\right) \\ \mathfrak{r}_i = a'\dfrac{da}{dt} + b'\dfrac{db}{dt} + c'\dfrac{dc}{dt} = -\left(a\dfrac{da'}{dt} + b\dfrac{db'}{dt} + c\dfrac{dc'}{dt}\right) \end{array}\right\},$$

$$\left\{\begin{aligned}
\hat{\mathfrak{p}} &= \widehat{a}''\frac{d\widehat{a}'}{dt}+\widehat{b}''\frac{d\widehat{b}'}{dt}+\widehat{c}''\frac{d\widehat{c}'}{dt}=-\left(\widehat{a}'\frac{d\widehat{a}''}{dt}+\widehat{b}'\frac{d\widehat{b}''}{dt}+\widehat{c}'\frac{d\widehat{c}''}{dt}\right),\\
\hat{\mathfrak{q}} &= \widehat{a}\frac{d\widehat{a}''}{dt}+\widehat{b}\frac{d\widehat{b}''}{dt}+\widehat{c}\frac{d\widehat{c}''}{dt}=-\left(\widehat{a}''\frac{d\widehat{a}}{dt}+\widehat{b}''\frac{d\widehat{b}}{dt}+\widehat{c}''\frac{d\widehat{c}}{dt}\right),\\
\hat{\mathfrak{r}} &= \widehat{a}'\frac{d\widehat{a}}{dt}+\widehat{b}'\frac{d\widehat{b}}{dt}+\widehat{c}'\frac{d\widehat{c}}{dt}=-\left(\widehat{a}\frac{d\widehat{a}'}{dt}+\widehat{b}\frac{d\widehat{b}'}{dt}+\widehat{c}\frac{d\widehat{c}'}{dt}\right),
\end{aligned}\right.$$

und

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{p}_i &= \mathfrak{a}''\frac{d\mathfrak{a}'}{dt}+\mathfrak{b}''\frac{d\mathfrak{b}'}{dt}+\mathfrak{c}''\frac{d\mathfrak{c}'}{dt}=-\left(\mathfrak{a}'\frac{d\mathfrak{a}''}{dt}+\mathfrak{b}'\frac{d\mathfrak{b}''}{dt}+\mathfrak{c}'\frac{d\mathfrak{c}''}{dt}\right),\\
\mathfrak{q}_i &= \mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}''}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{b}''}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\mathfrak{c}''}{dt}=-\left(\mathfrak{a}''\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\mathfrak{b}''\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\mathfrak{c}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}\right),\\
\mathfrak{r}_i &= \mathfrak{a}'\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\mathfrak{b}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\mathfrak{c}'\frac{d\mathfrak{c}}{dt}=-\left(\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{a}'}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\mathfrak{b}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\mathfrak{c}'}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Die Gleichungen (c) geben aber auch die Änderungsgesetze in Bezug auf t:

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{da}{dt} &= \widehat{a}\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\widehat{a}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\widehat{a}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}+\mathfrak{a}\frac{d\widehat{a}}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\widehat{a}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\widehat{a}''}{dt}\\
\frac{db}{dt} &= \widehat{b}\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\widehat{b}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\widehat{b}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}+\mathfrak{a}\frac{d\widehat{b}}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\widehat{b}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\widehat{b}''}{dt}\\
\frac{dc}{dt} &= \widehat{c}\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\widehat{c}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\widehat{c}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}+\mathfrak{a}\frac{d\widehat{c}}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\widehat{c}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\widehat{c}''}{dt}
\end{aligned}\right.$$

u. s. f.

und wenn diese in die obigen Werthe von $\mathfrak{p}_i$, $\mathfrak{q}_i$, $\mathfrak{r}_i$ eingeführt werden, so erhält man für die letzte dieser Componenten den Ausdruck:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{r}_i = {} & (\widehat{a}\mathfrak{a}'+\widehat{a}'\mathfrak{b}'+\widehat{a}''\mathfrak{c}')\left(\widehat{a}\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\widehat{a}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\widehat{a}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}+\mathfrak{a}\frac{d\widehat{a}}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\widehat{a}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\widehat{a}''}{dt}\right)\\
& +(\widehat{b}\mathfrak{a}'+\widehat{b}'\mathfrak{b}'+\widehat{b}''\mathfrak{c}')\left(\widehat{b}\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\widehat{b}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\widehat{b}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}+\mathfrak{a}\frac{d\widehat{b}}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\widehat{b}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\widehat{b}''}{dt}\right)\\
& +(\widehat{c}\mathfrak{a}'+\widehat{c}'\mathfrak{b}'+\widehat{c}''\mathfrak{c}')\left(\widehat{c}\frac{d\mathfrak{a}}{dt}+\widehat{c}'\frac{d\mathfrak{b}}{dt}+\widehat{c}''\frac{d\mathfrak{c}}{dt}+\mathfrak{a}\frac{d\widehat{c}}{dt}+\mathfrak{b}\frac{d\widehat{c}'}{dt}+\mathfrak{c}\frac{d\widehat{c}''}{dt}\right).
\end{aligned}\right.$$

Führt man dann die Multiplication aus, so ergibt sich mit Beachtung der Bedingungsgleichungen:

$$\widehat{a^2}+\widehat{b^2}+\widehat{c^2}=1 \qquad , \qquad \widehat{a}\,\widehat{a'}+\widehat{b}\,\widehat{b'}+\widehat{c}\,\widehat{c'}=0$$

u. s. f. u. s. f.

$$\widehat{a}\,\frac{d\widehat{a}}{dt}+\widehat{b}\,\frac{d\widehat{b}}{dt}+\widehat{c}\,\frac{d\widehat{c}}{dt}=0$$

u. s. f.

und mit Berücksichtigung der vorhergehenden Werthe der Componenten $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$, der einfache Ausdruck:

$$\mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}_1'+(\mathfrak{a}\mathfrak{b}'-\mathfrak{a}'\mathfrak{b})\widehat{\mathfrak{r}}+(\mathfrak{a}'\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{c}')\widehat{\mathfrak{q}}+(\mathfrak{b}\mathfrak{c}'-\mathfrak{b}'\mathfrak{c})\widehat{\mathfrak{p}}\,.$$

Man hat ferner nach §. 21 der Einleitung für die Cosinus $\mathfrak{a}''$, $\mathfrak{b}''$, $\mathfrak{c}''$ der Winkel, welche eine Gerade, die auf zwei andern unter sich senkrechten Geraden senkrecht steht, mit drei unter sich rechtwinkligen Achsen bildet, wenn $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ und $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ die Cosinus der Winkel zwischen den letztern Geraden und denselben Achsen vorstellen, die Beziehungen:

$$\mathfrak{a}''=\mathfrak{b}\mathfrak{c}'-\mathfrak{b}'\mathfrak{c} \quad , \quad \mathfrak{b}''=\mathfrak{a}'\mathfrak{c}-\mathfrak{a}\mathfrak{c}' \quad , \quad \mathfrak{c}''=\mathfrak{a}\mathfrak{b}'-\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\,,$$

und mit diesen findet man durch den vorhergehenden Werth von $\mathfrak{r}_1$, sowie durch ähnliche Umwandlungen in Betreff der für die Componenten $\mathfrak{p}_1$ und $\mathfrak{q}_1$ sich ergebenden Werthe die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{r}_1 &= \mathfrak{r}_1'+\mathfrak{a}''\widehat{\mathfrak{p}}+\mathfrak{b}''\widehat{\mathfrak{q}}+\mathfrak{c}''\widehat{\mathfrak{r}}\\ \mathfrak{q}_1 &= \mathfrak{q}_1'+\mathfrak{a}'\widehat{\mathfrak{p}}+\mathfrak{b}'\widehat{\mathfrak{q}}+\mathfrak{c}'\widehat{\mathfrak{r}}\\ \mathfrak{p}_1 &= \mathfrak{p}_1'+\mathfrak{a}\widehat{\mathfrak{p}}+\mathfrak{b}\widehat{\mathfrak{q}}+\mathfrak{c}\widehat{\mathfrak{r}}\end{aligned}\right\}. \qquad (d,$$

Die drei letzten Glieder dieser Gleichungen sind aber auch die zu den Achsen der z, y, und x parallelen Componenten der Winkelgeschwindigkeit $\widehat{\varphi}$ des Coordinatensystems der ξ', η', ζ'; bezeichnet man diese demnach mit $\widehat{\varphi_z}$, $\widehat{\varphi_y}$, $\widehat{\varphi_x}$, so hat man die einfachen Beziehungen:

$$\mathfrak{p}_1=\mathfrak{p}_1'+\widehat{\varphi_x} \quad , \quad \mathfrak{q}_1=\mathfrak{q}_1'+\widehat{\varphi_y} \quad , \quad \mathfrak{r}_1=\mathfrak{r}_1'+\widehat{\varphi_z}\,. \qquad (62,$$

Aus diesen Beziehungen folgt, daß die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit des Körpers A_1 für einen unbeweglichen Beobachter die Resultirende ist aus der Winkelgeschwindigkeit der sich drehenden Achsen und der relativen Winkelgeschwindigkeit, welche ein Beobachter wahrnimmt, der gegen die letztern Achsen eine unveränderliche Lage behält. Die Lage der augenblicklichen Drehungsachse des Körpers gegen die drei natürlichen Drehungsachsen desselben bestimmt sich wieder durch die Verhältnisse der Componenten der Winkelgeschwindigkeit zu dieser selbst; man hat daher für die Winkel λ, μ, ν, welche die Drehungsachse für die absolute drehende Bewegung mit den genannten Achsen macht, die Gleichungen:

$$\cos\lambda = \frac{\mathfrak{p}_i}{\varphi_i} = \frac{\mathfrak{p}_i' + \widehat{\varphi_x}}{\varphi_i}, \quad \cos\mu = \frac{\mathfrak{q}_i}{\varphi_i} = \frac{\mathfrak{q}_i' + \widehat{\varphi_y}}{\varphi_i},$$

$$\cos\nu = \frac{\mathfrak{r}_i}{\varphi_i} = \frac{\mathfrak{r}_i' + \widehat{\varphi_z}}{\varphi_i},$$

worin

$$\varphi_i = \sqrt{\mathfrak{p}_i^2 + \mathfrak{q}_i^2 + \mathfrak{r}_i^2}$$

$$= \sqrt{(\mathfrak{p}_i' + \widehat{\varphi_x})^2 + (\mathfrak{q}_i' + \widehat{\varphi_y})^2 + (\mathfrak{r}_i' + \widehat{\varphi_z})^2}$$

ist, während die Winkel λ', μ', ν', welche die augenblickliche Drehungsachse für die relative Winkelgeschwindigkeit mit denselben Achsen bildet, durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda' = \frac{\mathfrak{p}_i'}{\varphi_i'}, \quad \cos\mu' = \frac{\mathfrak{q}_i'}{\varphi_i'}, \quad \cos\nu' = \frac{\mathfrak{r}_i'}{\varphi_i'}$$

bestimmt werden, wozu man hat

$$\varphi_i' = \sqrt{\mathfrak{p}_i'^2 + \mathfrak{q}_i'^2 + \mathfrak{r}_i'^2}.$$

Die Lage dieser letztern Drehungsachse ist also in dem Körper A_1 eine andere als die erstere, oder der dem beweglichen Coordinatensystem angehörende Beobachter sieht den Körper in jedem Augenblicke um eine andere Achse drehen, als der unbewegliche Beobachter, und wenn man die absolute Winkelgeschwindigkeit φ_i des Körpers in Längeneinheiten auf diejenige Hälfte der entsprechenden augenblicklichen Drehungsachse aufträgt, von welcher aus gesehen, die drehende Bewegung eine positive

[illegible], die Winkelgeschwindigkeit $\widehat{\varphi}$ dagegen in gleichen Längeneinheiten aber [illegible] entgegengesetztem Sinne genommen auf eine durch den Mittelpunkt [illegible]r Masse M_i gelegte und zu der augenblicklichen Drehungsachse des Coordinatensystems der ξ, η, ζ parallele Gerade, so wird die Diagonale des über diesen Winkelgeschwindigkeiten construirten Parallelogrammes die Größe der augenblicklichen relativen Winkelgeschwindigkeit und die Lage der entsprechenden Drehungsachse im Körper A_i bestimmen.

In §. 189 des zweiten Buches wurden die zu den natürlichen Drehungsachsen parallelen fördernden Componenten $\mathfrak{X}'$, $\mathfrak{Y}'$, $\mathfrak{Z}'$, sowie die um diese Achsen drehenden Wirkungen einer Kraft $\mathfrak{P}$ abgeleitet, welche einem materiellen Punkte von der Masse m, der einem sich drehenden festen Körper angehört, wenn er frei und für sich allein wäre, dieselbe Bewegung ertheilen würde, wie er sie in Verbindung mit dem festen Körper erhält. Die drehenden Componenten dieser Kraft nehmen in unserm jetzigen Falle die Bezeichnung und Form an:

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{Z}'\mathfrak{y} - \mathfrak{Y}'\mathfrak{z} \;, \quad \mathfrak{M}_y = \mathfrak{X}'\mathfrak{z} - \mathfrak{Z}'\mathfrak{x} \;, \quad \mathfrak{M}_z = \mathfrak{Y}'\mathfrak{x} - \mathfrak{X}'\mathfrak{y}$$

und durch die Componenten der absoluten Winkelgeschwindigkeit ausgedrückt erhalten sie Werthe von derselben Form, wie die Werthe (131) in dem genannten Paragraphen, in welchen man nur die ξ, η, ζ durch $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ ersetzen darf. Man hat daher

$$\mathfrak{M}_x = m(\mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)\frac{d\mathfrak{p}_i}{dt} - m\mathfrak{x}\mathfrak{y}\frac{d\mathfrak{q}_i}{dt} - m\mathfrak{x}\mathfrak{z}\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt}$$
$$- m(\mathfrak{q}_i\mathfrak{z} - \mathfrak{r}_i\mathfrak{y})(\mathfrak{p}_i\mathfrak{x} + \mathfrak{q}_i\mathfrak{y} + \mathfrak{r}_i\mathfrak{z})$$

u. s. f.

und ersieht daraus, daß diese Componenten blos von der Winkelgeschwindigkeit des Körpers und den Coordinaten des betreffenden Punktes in Bezug auf dessen Hauptachsen im Schwerpunkte abhängen, daß also auch die Gesammtwirkungen der um dieselben Achsen drehenden Componenten für alle Punkte des Körpers A_i dieselbe Form behalten, nämlich

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma.\mathfrak{M}_x &= \mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{p}_i}{dt} - \mathfrak{q}_i\mathfrak{r}_i(\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\\
\Sigma.\mathfrak{M}_y &= \mathfrak{B}_i\frac{d\mathfrak{q}_i}{dt} - \mathfrak{p}_i\mathfrak{r}_i(\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\\
\Sigma.\mathfrak{M}_z &= \mathfrak{C}_i\frac{d\mathfrak{r}_i}{dt} - \mathfrak{p}_i\mathfrak{q}_i(\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)
\end{aligned}\right\}$$

Wenn man daher in diese Werthe die einfachen Beziehungen (62) zwischen den Componenten der absoluten Winkelgeschwindigkeit und den Componenten der relativen Winkelgeschwindigkeit einführt, so werden dieselben unserer Untersuchung entsprechend die Form annehmen:

$$\text{e.)}\left\{\begin{aligned}
\Sigma.\mathfrak{M}_{\mathfrak{x}} &= \mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{p}_i'}{dt} - \mathfrak{q}_i'\mathfrak{r}_i'(\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i) + \mathfrak{A}_i\frac{d\varphi_{\mathfrak{x}}}{dt} - \varphi_{\mathfrak{y}}\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i),\\
\Sigma.\mathfrak{M}_{\mathfrak{y}} &= \mathfrak{B}_i\frac{d\mathfrak{q}_i'}{dt} - \mathfrak{p}_i'\mathfrak{r}_i'(\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i) + \mathfrak{B}_i\frac{d\varphi_{\mathfrak{y}}}{dt} - \varphi_{\mathfrak{x}}\varphi_{\mathfrak{z}}(\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i),\\
\Sigma.\mathfrak{M}_{\mathfrak{z}} &= \mathfrak{C}_i\frac{d\mathfrak{r}_i'}{dt} - \mathfrak{p}_i'\mathfrak{q}_i'(\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i) + \mathfrak{C}_i\frac{d\varphi_{\mathfrak{z}}}{dt} - \varphi_{\mathfrak{x}}\varphi_{\mathfrak{y}}(\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i).
\end{aligned}\right.$$

Beachtet man endlich, daß die beiden letzten Glieder in jeder Zeile eine um die entsprechende Achse drehende Kraft vorstellen, welche dem Körper A_i in Bezug auf diese Achse dieselbe Winkelbeschleunigung ertheilen kann, welche das Coordinatensystem der ξ', η', ζ' in demselben Augenblick um eine parallele Achse besitzt und bezeichnet diese drehenden Kräfte den Achsen der $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ entsprechend, mit $\widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{x}}$, $\widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{y}}$, $\widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{z}}$, so daß man hat

$$\text{f.)}\left\{\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{x}} &= \mathfrak{A}_i\frac{d\widehat{\varphi}_{\mathfrak{x}}}{dt} - (\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i)\,\widehat{\varphi}_{\mathfrak{y}}\widehat{\varphi}_{\mathfrak{z}}\\
\widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{y}} &= \mathfrak{B}_i\frac{d\widehat{\varphi}_{\mathfrak{y}}}{dt} - (\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i)\,\widehat{\varphi}_{\mathfrak{x}}\widehat{\varphi}_{\mathfrak{z}}\\
\widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{z}} &= \mathfrak{C}_i\frac{d\widehat{\varphi}_{\mathfrak{z}}}{dt} - (\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i)\,\widehat{\varphi}_{\mathfrak{x}}\widehat{\varphi}_{\mathfrak{y}}
\end{aligned}\right.$$

dann die drehenden Wirkungen der äußern Kräfte um dieselben Achsen mit $M_i^{(\mathfrak{x})}$, $M_i^{(\mathfrak{y})}$, $M_i^{(\mathfrak{z})}$; die einer der innern Kräfte mit $\mathfrak{J}_{i,h}^{(\mathfrak{x})}$, $\mathfrak{J}_{i,h}^{(\mathfrak{y})}$, $\mathfrak{J}_{i,h}^{(\mathfrak{z})}$, so werden nun die Gleichungen für die innere drehende Bewegung des Körpers A_i in Bezug auf die in drehender Bewegung begriffenen Achsen der ξ, η, ζ folgende Form erhalten:

$$\text{63.)}\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{A}_i\frac{d\mathfrak{p}_i'}{dt} &= (\mathfrak{B}_i-\mathfrak{C}_i)\,\mathfrak{q}_i'\mathfrak{r}_i' + M_i^{(\mathfrak{x})} - \widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{x}} + \sum_{h=1}^{h=n}.\,\mathfrak{J}_{i,h}^{(\mathfrak{x})},\\
\mathfrak{B}_i\frac{d\mathfrak{q}_i'}{dt} &= (\mathfrak{C}_i-\mathfrak{A}_i)\,\mathfrak{p}_i'\mathfrak{r}_i' + M_i^{(\mathfrak{y})} - \widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{y}} + \sum_{h=1}^{h=n}.\,\mathfrak{J}_{i,h}^{(\mathfrak{y})},\\
\mathfrak{C}_i\frac{d\mathfrak{r}_i'}{dt} &= (\mathfrak{A}_i-\mathfrak{B}_i)\,\mathfrak{p}_i'\mathfrak{q}_i' + M_i^{(\mathfrak{z})} - \widehat{\mathfrak{M}}_{\mathfrak{z}} + \sum_{h=1}^{h=n}.\,\mathfrak{J}_{i,h}^{(\mathfrak{z})}.
\end{aligned}\right.$$

In diesen Gleichungen sind die innern Kräfte $\sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(x)}$ u. s. f. nur Functionen der Winkel ϑ_i', ω_i' und ψ_i', durch welche die Lage der Hauptachsen des Körpers A_i gegen die beweglichen Achsen der ξ, η, ζ bestimmt werden, die Kräfte $M_i^{(x)}$, u. s. f. sind Functionen dieser letztern Winkel und der in Function der Zeit t gegebenen Winkel $\widehat{\vartheta}$, $\widehat{\omega}$, $\widehat{\psi}$, und die Kräfte $\widehat{\mathfrak{M}}_x$, u. s. f. sind Functionen der ebenfalls als bekannt vorausgesetzten Winkelgeschwindigkeiten $\widehat{\mathfrak{p}}$, $\widehat{\mathfrak{q}}$, $\widehat{\mathfrak{r}}$ und der Winkel ϑ_i', ω_i', ψ_i'. Es sind demnach nur diese letztern und die innern Winkelgeschwindigkeiten $\mathfrak{p}_i'$, $\mathfrak{q}_i'$, $\mathfrak{r}_i'$ als unbekannte und zu bestimmende Functionen der Zeit in den Gleichungen (63) enthalten und man hat daher diese Gleichungen wieder mit den Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{p}_i' &= -\frac{d\omega_i'}{dt} \cos\psi_i' \sin\vartheta_i' + \frac{d\vartheta_i'}{dt} \sin\psi_i' \\
\mathfrak{q}_i' &= \frac{d\omega_i'}{dt} \sin\psi_i' \sin\vartheta_i' + \frac{d\vartheta_i'}{dt} \cos\psi_i' \\
\mathfrak{r}_i' &= \frac{d\omega_i'}{dt} \cos\vartheta_i' + \frac{d\psi_i'}{dt}
\end{aligned}\right\} \quad (64.$$

zu verbinden, um aus denselben jene Functionen von t, oder die Gesetze der innern drehenden Bewegung abzuleiten.

§. 34.

Was nun noch die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines aus festen Körpern gebildeten veränderlichen Systems betrifft, so wird man dieselben für jeden einzelnen dieser Körper leicht aus dem Vorhergehenden folgern können.

In Bezug auf parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen geben die Gleichungen (57) für das Gleichgewicht des Mittelpunktes der Masse M_i oder für das Gleichgewicht des Körpers A_i längs dieser Achsen, indem man darin die Aenderungsgesetze $\frac{d^2x_i}{dt^2}$, $\frac{d^2y_i}{dt^2}$, $\frac{d^2z_i}{dt^2}$ Null setzt, die Bedingungen:

$$65.)\quad \begin{cases} X_i - M_i \dfrac{d^2 X}{dt^2} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} = 0 \\ Y_i - M_i \dfrac{d^2 Y}{dt^2} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \beta_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \beta_{i,k} = 0 \\ Z_i - M_i \dfrac{d^2 Z}{dt^2} - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} = 0 . \end{cases}$$

Die Bedingungen für das ruhende Gleichgewicht desselben Körpers um seine Hauptachsen folgen aus den Gleichungen (59), wenn darin die Componenten der Winkelgeschwindigkeit gleich Null genommen werden und sind einfach

$$66.)\quad \begin{cases} M_i^{(\xi)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{h,i}^{(\xi)} = 0 \;, \quad M_i^{(\eta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{h,i}^{(\eta)} = 0 \;, \\ M_i^{(\zeta)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{h,i}^{(\zeta)} = 0 \;; \end{cases}$$

man kann aber die innern und äußern drehenden Wirkungen nun ebensowohl auf die Coordinaten-Achsen selbst beziehen, und diesen Bedingungen die Form geben:

$$67.)\quad \begin{cases} M_i^{(x)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{h,i}^{(x)} = 0 \;, \quad M_i^{(y)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{h,i}^{(y)} = 0 \;, \\ M_i^{(z)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{h,i}^{(z)} = 0 \;, \end{cases}$$

indem man die an dem Körper A_i angreifenden und um die Achsen der x, y und z drehenden Wirkungen der äußern Kräfte mit $M_i^{(x)}$, $M_i^{(y)}$, $M_i^{(z)}$, mit $\mathfrak{J}_{h,i}^{(x)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(y)}$, $\mathfrak{J}_{h,i}^{(z)}$ dagegen die um dieselben Achsen drehenden Kräfte bezeichnet, welche in Folge der Wechselwirkung zwischen dem Körper A_h und Körper A_i an dem letztern thätig sind.

Ebenso wird man die Bedingungen für das Gleichgewicht in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem aus den Gleichungen (58) und (63) ableiten; die erstern geben übereinstimmend mit den Gleichungen (52) für das ruhende relative Gleichgewicht des Mittelpunktes der Masse M_i die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l}
\left(\Xi_i - \mathfrak{X}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\lambda_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\lambda_{i,k}\right) \Sigma . M - M_i \Sigma . \Xi = 0 \\
\left(H_i - \mathfrak{Y}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\mu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\mu_{i,k}\right) \Sigma . M - M_i \Sigma . H = 0 \\
\left(Z_i - \mathfrak{Z}_i - \sum\limits_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\nu_{h,i} + \sum\limits_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\nu_{i,k}\right) \Sigma . M - M_i \Sigma . Z = 0
\end{array}\right\} , \quad (68.$$

und aus den letztern zieht man für das ruhende relative Gleichgewicht des Körpers A_i um seine Hauptachsen die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{c}
M_i^{(x)} - \widehat{\mathfrak{M}}_x + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(x)} = 0 , \quad M_i^{(y)} - \widehat{\mathfrak{M}}_y + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(y)} = 0 \\
M_i^{(z)} - \widehat{\mathfrak{M}}_z + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(z)} = 0
\end{array}\right\}$$

welche mit den Werthen (f) von $\widehat{\mathfrak{M}}_x$, $\widehat{\mathfrak{M}}_y$, $\widehat{\mathfrak{M}}_z$ auch die Form erhalten

$$\left.\begin{array}{l}
\mathfrak{A}_i \dfrac{d\widehat{\varphi_x}}{dt} = (\mathfrak{B}_i - \mathfrak{C}_i)\, \widehat{\varphi_y}\, \widehat{\varphi_z} + M_i^{(x)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(x)} \\
\mathfrak{B}_i \dfrac{d\widehat{\varphi_y}}{dt} = (\mathfrak{C}_i - \mathfrak{A}_i)\, \widehat{\varphi_x}\, \widehat{\varphi_z} + M_i^{(y)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(y)} \\
\mathfrak{C}_i \dfrac{d\widehat{\varphi_z}}{dt} = (\mathfrak{A}_i - \mathfrak{B}_i)\, \widehat{\varphi_x}\, \widehat{\varphi_y} + M_i^{(z)} + \sum\limits_{h=1}^{h=n} . \mathfrak{J}_{i,h}^{(z)}
\end{array}\right\} , \quad (69$$

und nun aussprechen, was ohnehin einleuchtet, daß der Körper A_i durch die Gesammtwirkung der innern und äußern drehenden Kräfte eine absolute drehende Bewegung um seine Hauptachsen im Schwerpunkt erhalten muß, welche der des Coordinatensystems der ξ, η, ζ in Bezug auf parallelen Achsen gleich und mit ihr in gleichem Sinne gerichtet ist.

Wir erhalten demnach für alle n Körper des Systems in jedem Falle 6 n Bedingungsgleichungen, welche zur Bestimmung der Gleichgewichtslage ihrer Mittelpunkte und ihrer natürlichen Drehungsachsen nothwendig sind und genügen.

In besondern Fällen nehmen sowohl die vorhergehenden Bedingungsgleichungen für das innere Gleichgewicht, als die im vorigen Paragraphen abgeleiteten Gesetze für die innere Bewegung eines aus festen

Körpern bestehenden Systems wieder einfachere Formen an, welche sich aus ihnen nach den in §. 31 für ein aus materiellen Punkten bestehendes System und für solche besondere Fälle dargestellten Gleichungen leicht ableiten lassen.

II. Stetige veränderliche Systeme.

§. 35.

Kommen wir nun zu der Untersuchung des innern Zustandes eines Systems, welches für unsere Vorstellung und insbesondere für die mathematische Behandlung als ein System von stetig aufeinanderfolgenden materiellen Punkten zu betrachten ist, in welchem aber die zwischen den einzelnen Punkten thätigen Kräfte unbekannt sind, von welchem nur die anfängliche äußere Form und das für den Anfang der Bewegung geltende Gesetz, durch welches die geometrische Dichte in einem durch seine Coordinaten bestimmten Punkte ausgedrückt wird, gegeben ist.

Bei einem solchen System haben wir eine zweifache stetige Aenderung zu beachten und zu unterscheiden, einmal die stetige Aenderung in der Lage eines Punktes in Folge seiner Bewegung, also in Bezug auf die Aenderung der Zeit, und dann den stetigen Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern. Für diesen letztern sind die Coordinaten x, y, z eines Punktes als völlig unabhängige Veränderliche zu betrachten; in Bezug auf die stetige Aenderung der Lage durch die Bewegung und mit der Zeit dagegen werden jene Veränderliche von einer vierten, der Zeit t, abhängig und stellen noch unbekannte Functionen dieser letztern vor. Wir wollen daher die Aenderungsgesetze in Bezug auf die Zeit wie gewöhnlich durch das Differential-Zeichen d andeuten; die Anfangswerthe solcher Aenderungsverhältnisse dagegen, welche sich auf den Uebergang von einem Punkte des Systems zu einem andern ohne Rücksicht auf die Bewegung beziehen, durch das Variationszeichen δ, wie es in der Einleitung §. 43 u. f. angewendet wurde.

Darnach werden $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ wieder die Componenten u_x, u_y, u_z der Geschwindigkeit $v = \frac{ds}{dt}$ eines Punktes sein, dessen Lage am Ende der Zeit t durch die Coordinaten x, y, z in Bezug auf ein festes Coordinatensystem bestimmt wird; diese Componenten sind dann aber

ist die Geschwindigkeit v selbst, Functionen der Coordinaten x, y, z und der Zeit t, wobei die erstern selbst als Functionen von t gedacht werden müssen; wir müssen daher auch die vollständigen Aenderungsgesetze dieser Functionen in Bezug auf t, übereinstimmend mit der in der Einleitung §. 32 u. f. angewendeten Bezeichnung durch $\frac{d.u_x}{dt}$, $\frac{d.u_y}{dt}$, $\frac{d.u_z}{dt}$ vorstellen, um sie von den theilweisen Aenderungsgesetzen $\frac{du_x}{dt}$, $\frac{du_y}{dt}$, $\frac{du_z}{dt}$ in Bezug auf t allein zu unterscheiden. Wir haben dann nach den am genannten Orte ausgeführten Entwickelungen für jene vollständigen Aenderungsgesetze die entwickelten Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d.u_x}{dt} &= \frac{du_x}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u_x}{\partial z}\frac{dz}{dt} \\
&= \frac{du_x}{dt} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \\
\frac{d.u_y}{dt} &= \frac{du_y}{dt} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \\
\frac{d.u_z}{dt} &= \frac{du_z}{dt} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z}
\end{aligned}\right\}, \quad \text{a.}$$

und ganz ähnliche Beziehungen ergeben sich auch für die Aenderungsgesetze der Componenten u_x', u_y', u_z' der relativen Geschwindigkeit v′ eines Punktes x′ y′ z′ in Bezug auf ein parallel fortschreitendes Coordinatensystem und für die Aenderungsgesetze der Componenten u_ξ, u_η, u_ζ der relativen Geschwindigkeit v_ξ eines Punktes $\xi\,\eta\,\zeta$ in Bezug auf ein sich drehendes Coordinatensystem.

Denken wir uns nun das System zuerst auf parallel fortschreitende Coordinaten-Achsen der x′, y′, z′ bezogen, deren Anfangspunkt der augenblickliche Mittelpunkt der Masse des Systems sei, und dann am Ende der Zeit t einen Theil desselben in dem Punkte x′ y′ z′ durch drei zu den entsprechenden Coordinaten-Ebenen parallele Ebenen begrenzt, so haben wir für den so begrenzten Raum V den Ausdruck (Buch II., §. 58):

$$V = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' \,.\, 1 \,;$$

worin die obern Grenzen x', y', z' von einander unabhängig, und die untern x_0', y_0', z_0' ganz willkürlich sind, da dieselben nur von der beliebigen äußeren Bewegung des Systems abhängen. Durch die innere Bewegung des Systems wird der Punkt $x'\,y'\,z'$ am Ende der Zeit $t+\Delta t$ eine Lage erhalten, welche durch die Coordinaten $x'+\Delta_t x'$, $y'+\Delta_t y'$, $z'+\Delta_t z'$ bestimmt ist, und der Rauminhalt V sich um $\Delta_t V$ vergrößern, so daß man nun den Ausdruck:

$$V+\Delta_t V=\int_{x_0'}^{x'+\Delta_t x'}\delta x'\int_{y_0'}^{y'+\Delta_t y'}\delta y'\int_{z_0'}^{z'+\Delta_t z'}\delta z'\,.\,1\,,$$

erhält, da man die willkürlichen untern Grenzen dieses Integrals als unveränderlich annehmen kann. Man hat aber ferner mit einstweiliger Auslassung der Accente

$$\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1=\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,1+\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1=\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,1+\Delta_t z\,,$$

$$\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1=\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1$$

$$=\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,1+\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,\Delta_t z+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,1+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\,.\,\Delta_t z\,,$$

$$\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1$$

$$+\int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,1\,,$$

$$=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,1+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,\Delta_t z+\text{etc.}$$

Die weitere Entwicklung dieses Integrals gibt mit der entsprechenden Aenderung in der Ordnung der Integration und mit Berücksichtigung des Werthes von V den Ausdruck:

$$\frac{\Delta_t V}{\Delta t} = \left\{ \begin{aligned} &\int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \cdot \frac{\Delta_t z}{\Delta t} + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} \\ &+ \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \cdot \frac{\Delta_t z}{\Delta t} + \int_{z_0}^{z} \delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \cdot \frac{\Delta_t y}{\Delta t} + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z} \delta z \cdot \frac{\Delta_t x}{\Delta t} \\ &+ \int_{x}^{x+\Delta_t x} \delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y} \delta y \cdot \frac{\Delta_t z}{\Delta t} \end{aligned} \right\},$$

und der Anfangswerth dieses Aenderungsverhältnisses führt auf das Aenderungsgesetz:

$$\frac{d \cdot V}{d t} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \cdot u_z + \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{z_0}^{z} \delta z \; u_y + \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z \cdot u_x ,$$

da die vier letzten Integrale offenbar mit Δt verschwinden. Nimmt man dann von diesem Aenderungsgesetz des Raumes in Bezug auf die Zeit das Uebergangsgesetz in Bezug auf die von der Zeit unabhängige Aenderung von x', y', z', oder für den Uebergang von dem Punkte $x' y' z'$ zu einem folgenden, so ergibt sich mit der Beachtung, daß

$$\frac{\delta^3 \cdot \frac{d V}{d t}}{\delta x' \delta y' \delta z'} = \frac{d \cdot \frac{\delta^3 V}{\delta x' \delta y' \delta z'}}{d t} = \frac{d \varrho}{d t}$$

gesetzt werden kann, wenn man mit ϱ die am Ende einer beliebigen Zeit eingetretene **geometrische Raumausdehnung** in dem Punkte $x' y' z'$ bezeichnet, die Beziehung:

$$\frac{d \varrho}{d t} = \frac{\delta u_{x'}}{\delta x'} + \frac{\delta u_{y'}}{\delta y'} + \frac{\delta u_{z'}}{\delta z'} , \qquad (70)$$

welche demnach sowohl das zeitliche Aenderungsgesetz der örtlichen Raumänderung oder Raumausdehnung ϱ, als das Uebergangsgesetz der auf die Zeit bezogenen Raumänderung $\frac{dV}{dt}$ ausdrückt.

In Folge dieser Raumänderung, welche durch die innere Bewegung erzeugt wird, ändert sich auch die geometrische Dichte q in dem Punkte $x'y'z'$; diese Aenderung ist aber durch die Volumenänderung bedingt, da die Masse M des begrenzten Theiles stetig und unverändert bleiben muß, und es wird sich zunächst darum handeln, die entsprechende Beziehung zwischen der Aenderung der Dichte und der Volumenausdehnung festzustellen. Dazu wollen wir, um keinen Zweifel über diese neue Beziehung obwalten zu lassen, wieder zur unmittelbaren Betrachtung der Aenderungsverhältnisse zurückgehen. Am Ende der Zeit t haben wir mit einstweiliger Weglassung der Accente bei x, y und z für die begrenzte Masse M (Buch II., §. 22.) den Ausdruck:

$$M = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, q\,;$$

nach der Zeit $t + \Delta t$ wird die Dichte q in dem Punkte xyz in $q + \Delta_t q$ übergehen, wenn $\Delta_t q$ die Aenderung von q in Bezug auf t allein vorstellt, und die obern Grenzen x, y, z der Integrale werden wieder $x + \Delta_t x$, $y + \Delta_t y$, $z + \Delta_t z$; der vorstehende Werth der Masse M, welche selbst ungeändert bleibt, nimmt daher nach dieser Zeit die Form an:

$$M = \int_{x_0}^{x+\Delta_t x} \partial x \int_{y_0}^{y+\Delta_t y} \partial y \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \partial z \,.\, (q + \Delta_t q)\,.$$

Es ist aber auch wie vorher

$$\left\{\begin{aligned} \int_{z_0}^{z+\Delta_t z} \partial z.(q+\Delta_t q) &= \int_{z_0}^{z} \partial z\,.\,(q+\Delta_t q) + \int_{z}^{z+\Delta_t z} \partial z\,.\,(q+\Delta_t q) \\ &= \int_{z_0}^{z} \partial z\,.\,q + \int_{z_0}^{z} \partial z\,.\,\Delta_t q + \int_{z}^{z+\Delta_t z} \partial z\,.\,q + \int_{z}^{z+\Delta_t z} \partial z\,.\,\Delta_t q\,; \end{aligned}\right.$$

und damit ergibt sich

$$\begin{aligned}\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q) &= \int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ &\quad+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ &=\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.q+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.\Delta_t q+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.q+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.\Delta_t q\\ &\quad+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.q+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z.\Delta_t q+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.q\\ &\quad+\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.\Delta_t q\,.\end{aligned}$$

Zuletzt findet man durch eine ähnliche Zerlegung

$$\begin{aligned}\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q) &=\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\\ &\quad+\int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z.(q+\Delta_t q)\end{aligned}$$

und die Entwickelung dieses Ausdruckes gibt mit entsprechenden Aenderungen in der Ordnung der Integration folgende zwölf Glieder:

(b.)

$$M = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z . q + \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z . \Delta_t q$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z . q + \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{z_0}^{z}\delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y . q + \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x . q$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z . \Delta_t q + \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{z_0}^{z}\delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y . \Delta_t q$$

$$+ \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z . \int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x . \Delta_t q$$

$$+ \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z . (q + \Delta_t q) + \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x \int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z . (q + \Delta_t q)$$

$$+ \int_{z_0}^{z}\delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y . (q + \Delta_t q)$$

$$+ \int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x \int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z . (q + \Delta_t q) .$$

Beachtet man nun den Werth von M für das Ende der Zeit t, womit die linke Seite der vorstehenden Gleichung auf Null kommt und das erste Glied der rechten Seite hinausfällt, nimmt dann das Aenderungsverhältniß der so reduzirten Gleichung zu Δt, und geht zu den Anfangswerthen der einzelnen Glieder dieses Verhältnisses zurück, so ergeben sich für die beiden ersten dieser Glieder folgende Ausdrücke:

$$\text{Anf:}\ \frac{\int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\Delta_t q}{\Delta t} = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\text{Anf:}\ \frac{\Delta_t q}{\Delta t}$$

$$= \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,\frac{dq}{dt}$$

$$\text{Anf:}\ \frac{\int_{y_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,q}{\Delta t} = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,\text{Anf:}\ \frac{\Delta z\,.\,Q_z}{\Delta t}$$

$$= \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y\ \text{Anf:}\ \frac{\Delta z\,.\,Q_z}{\Delta z}\,.\,\frac{\Delta_t z}{\Delta t}$$

$$= \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,q\frac{dz}{dt} = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,q u_z$$

in deren letzteren Q_z das Integral der Function q in Bezug auf z allein vorstellt, so daß man hat

$$\frac{dQ_z}{dz} = q.$$

Auf ähnliche Weise findet man für die beiden folgenden Glieder die Werthe:

$$\text{Anf:}\ \frac{\int_{x_0}^{x}\delta x \int_{z_0}^{z}\delta z \int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y\,.\,q}{\Delta t} = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_y\,.$$

$$\text{Anf:}\ \frac{\int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z \int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x\,.\,q}{\Delta t} = \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_x$$

während leicht zu sehen ist, daß die Anfangswerthe aller übrigen Glieder wegen der doppelten und mehrfachen Aenderungen, welche mit Δt verschwinden, auf Null zurückkommen müssen. So gibt z. B. das fünfte Glied

$$\text{Anf}: \frac{\int_{x_0}^{x}\partial x \int_{y_0}^{y}\partial y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z \,.\, \Delta_t q}{\Delta t} \text{ zuerst Anf}: \int_{x_0}^{x}\partial x \int_{y_0}^{y}\partial y \int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\partial z \,.\, \frac{\Delta_t q}{\Delta t}$$

und wenn Anf: $\frac{\Delta_t q}{\Delta t} = q'$ gesetzt wird, so folgt weiter

$$\text{Anf}: \int_{x_0}^{x}\partial x \int_{y_0}^{y}\partial y \int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z \,.\, \frac{\Delta_t q}{\Delta t} = \int_{x_0}^{x}\partial x \int_{y_0}^{y}\partial y \int_{z}^{z}\partial z \,.\, q' = 0\,,$$

wie für alle folgenden Glieder. Man zieht also aus dem vorhergehenden Ausdruck (b) die Gleichung:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x}\partial x \int_{y_0}^{y}\partial y \int_{z_0}^{z}\partial z \,.\, \frac{dq}{dt} + \int_{x_0}^{x}\partial x \int_{y_0}^{y}\partial y \,.\, q u_z + \int_{x_0}^{x}\partial x \int_{x_0}^{x}\partial z \,.\, q u_y \\ &\qquad + \int_{y_0}^{y}\partial y \int_{z_0}^{z}\partial z \,.\, q u_x = 0\,, \end{aligned}\right.$$

und daraus endlich in Bezug auf die gleichzeitige unabhängige Aenderung von x', y', z' das Uebergangsgesetz:

$$71.)\qquad \frac{dq}{dt} + \frac{\partial . q u_{z'}}{\partial z'} + \frac{\partial . q u_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial . q u_{x'}}{\partial x'} = 0\,.$$

Entwickelt man die drei letzten Glieder dieses Ausdruckes weiter, so wird derselbe

$$\frac{dq}{dt} + u_{x'}\frac{\partial q}{\partial x'} + u_{y'}\frac{\partial q}{\partial y'} + u_{z'}\frac{\partial q}{\partial z'} = -\,q\left(\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} + \frac{\partial u_{y'}}{\partial y'} + \frac{\partial u_{z'}}{\partial z'}\right),$$

und wenn man beachtet, daß die linke Seite das vollständige Aenderungsgesetz $\frac{d.q}{dt}$ der Dichte q als Function der vier Veränderlichen x', y', z' und t in Bezug auf die Zeit ist, und die Gleichung (70) berücksichtigt wird, so hat man die einfache Beziehung:

$$\frac{d.q}{dt} + q\frac{d.\varrho}{dt} = 0 \quad , \qquad (72^a.$$

und daraus folgen die Gleichungen:

$$\varrho - \varrho_0 = log\,\frac{q_0}{q} \quad , \quad q = q_0\,e^{\varrho_0 - \varrho} \quad , \qquad (72^b.$$

worin q_0 die Dichte und ϱ_0 die geometrische Raumausdehnung des Punktes x' y' z' am Ende der Zeit t_0 bedeuten, und welche das Gesetz ausdrücken, nach welchem sich die Dichte in Bezug auf die räumliche Ausdehnung ändert.

§. 36.

In derselben Weise, wie wir das Aenderungsgesetz der begrenzten Masse M in Bezug auf die Zeit abgeleitet haben, finden wir auch das erste und zweite Aenderungsgesetz der Momente Mx', My', Mz', durch welche die Lage des Mittelpunktes jener begrenzten Masse in Bezug auf die parallel fortschreitenden Achsen, deren Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems ist, bestimmt wird, und erhalten dadurch die Beziehungen für die innere Bewegung jenes Mittelpunktes. Lassen wir vorerst wieder die Accente bei den Veränderlichen x, y, z hinweg, was dasselbe ist, als wenn wir den Mittelpunkt der ganzen Masse als unbeweglich betrachten, oder den Mittelpunkt der begrenzten Masse auf ein festes Coordinatensystem beziehen, so haben wir am Ende der Zeit t [Buch II, §. 22 (16b.)]

$$\left.\begin{array}{l} Mx = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,qx \;,\quad My = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,qy \;, \\ Mz = \int_{x_0}^{x}\delta x \int_{y_0}^{y}\delta y \int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,qz \;; \end{array}\right\} (c$$

nach der Zeit $t + \Delta t$ dagegen werden diese Ausdrücke in

$$\text{d.)}\quad\begin{cases} M(x+\Delta_t x)=\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\partial x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\partial y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,x(q+\Delta_t q)\\[2ex] M(y+\Delta_t y)=\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\partial x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\partial y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,y(q+\Delta_t q)\\[2ex] M(z+\Delta_t z)=\int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\partial x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\partial y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,z(q+\Delta_t q)\end{cases}$$

übergehen, worin wieder $\Delta_t q$ die von der Zeit allein abhängige Aenderung der Dichte in dem Punkte xyz vorstellt. Zerlegen wir dann den Werth von $M(x+\Delta_t x)$ in ähnlicher Weise, wie den obigen Werth von M am Ende der Zeit $t+\Delta t$, so ergibt sich mit Hinweglassung derjenigen Glieder, worin sich die mit Δt verschwindenden Aenderungen zu sehr häufen, und mit Berücksichtigung der ersten der Gleichungen (c) der Ausdruck:

(e.)

$$\begin{aligned} M\Delta_t x &= \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,x\Delta_t q\\ &+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,qx+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{y}^{y+\Delta_t y}\partial y\,.\,qx+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{x}^{x+\Delta_t x}\partial x\,.\,qx\\ &+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,x\Delta_t q+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{y}^{y+\Delta_t y}\partial y\,.\,x\Delta_t q+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{x}^{x+\Delta_t x}\partial x\,.\,x\Delta_t q\\ &+\int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y}^{y+\Delta_t y}\partial y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,qx+\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{x}^{x+\Delta_t x}\partial x\int_{z}^{z+\Delta_t z}\partial z\,.\,qx\\ &+\int_{z_0}^{z}\partial z\int_{x}^{x+\Delta_t x}\partial x\int_{y}^{y+\Delta_t y}\partial y\,.\,qx\\ &+\text{etc.}\end{aligned}$$

aus welchen wieder das Aenderungsverhältniß $M\frac{\Delta_t x}{\Delta t}$ und dessen Anfangswerth $M\frac{dx}{dt}$ gezogen werden kann. Nach dem Vorhergehenden wird man für den letztern und die den andern Coordinatenachsen entsprechenden $M\frac{dy}{dt}$, $M\frac{dz}{dt}$ nun leicht die Ausdrücke ableiten:

$$\left.\begin{aligned}
M\frac{dx}{dt} &= \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z^0}^{z}\partial z.x\frac{dq}{dt} \\
&+ \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.xq\frac{dz}{dt} + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z.xq\frac{dy}{dt} + \int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.xq\frac{dx}{dt} \\
M\frac{dy}{dt} &= \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y^0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.y\frac{dq}{dt} \\
&+ \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.yq\frac{dz}{dt} + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.yq\frac{dy}{dt} + \int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.yq\frac{dx}{dt} \\
M\frac{dz}{dt} &= \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.z\frac{dq}{dt} \\
&+ \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y.zq\frac{dz}{dt} + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z.zq\frac{dq}{dt} + \int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z.zq\frac{dx}{dt}
\end{aligned}\right\}\text{(f.}$$

und daraus für den Uebergang zu dem Punkte: $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ die einfachen Gesetze

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial^3.M\frac{dx}{dt}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = q\frac{dx}{dt} = q u_x \quad , \quad \frac{\partial^3.M\frac{dy}{dt}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = q\frac{dy}{dt} = q u_y \\
\frac{\partial^3.M\frac{dz}{dt}}{\partial x\,\partial y\,\partial z} = q\frac{dz}{dt} = q u_z
\end{aligned}\right\}\text{(72.}$$

erhalten, wenn man beachtet, daß die Veränderlichen x, y, z für diesen Uebergang von einander unabhängig sind, daß man daher einerseits hat

$$\frac{\delta . x q u_z}{\delta z} = x \frac{\delta . q u_z}{\delta z} \; , \quad \frac{\delta . y q u_z}{\delta z} = y \frac{\delta . q u_z}{\delta z} \; , \text{ u. s. f.}$$

auf der andern Seite aber auch

$$\frac{\delta . x q u_x}{\delta x} = x \frac{\delta . q u_x}{\delta x} + q u_x \; ,$$

$$\frac{\delta . y q u_y}{\delta y} = y \frac{\delta . q u_y}{\delta y} + q u_y \; ,$$

$$\frac{\delta . z q u_z}{\delta z} = z \frac{\delta . q u_z}{\delta z} + q u_z \; ;$$

und daß demnach die erste der Gleichungen (f) zuerst das Gesetz:

$$\frac{\delta . M \frac{dx}{dt}}{\delta x \delta y \delta z} = q u_x + x \left(\frac{dq}{dt} + \frac{\delta . q u_z}{\delta z} + \frac{\delta . q u_y}{\delta y} + \frac{\delta . q u_x}{\delta x} \right) ,$$

gibt, welches mit Berücksichtigung der Bedingung (71) auf die erste der Gleichungen (72) zurückkommt.

Aus diesen Gleichungen schließt man rückwärts auf die für das Ende der Zeit t geltenden Beziehungen:

$$\left\{ \begin{aligned} & M \frac{dx}{dt} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . q u_x \; , \quad M \frac{dy}{dt} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . q u_y \; , \\ & M \frac{dz}{dt} = \int_{x_0}^{x} \delta x \int_{y_0}^{y} \delta y \int_{z_0}^{z} \delta z . q u_z \; , \end{aligned} \right.$$

und folgert aus diesen durch eine wiederholte Aenderung von t auf ähnlichem Wege wie vorher die zweiten Aenderungsgesetze $M\frac{d^2x}{dt^2}$, $M\frac{d^2y}{dt^2}$, $M\frac{d^2z}{dt^2}$. Man zieht z. B. aus der ersten die Aenderung:

$$\left.\begin{aligned} M\Delta_t\frac{dx}{dt} &= \int_{x_0}^{x+\Delta_t x}\delta x\int_{y_0}^{y+\Delta_t y}\delta y\int_{z_0}^{z+\Delta_t z}\delta z\,.\,(q+\Delta_t q)(u_x+\Delta_t u_x) \\ &\qquad -\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_x \\ &= \int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,(q\Delta_t u_x+u_x\Delta_t q) \\ &+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z}^{z+\Delta_t z}\delta z.q u_x+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{z_0}^{z}\delta z\int_{y}^{y+\Delta_t y}\delta y.q u_x+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\int_{x}^{x+\Delta_t x}\delta x.q u_x \\ &+ \text{etc.} \end{aligned}\right\}$$

und erhält damit als Anfangswerth des Aenderungsverhältnisses $M\frac{\Delta_t\frac{dx}{dt}}{\Delta t}$ den Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} M\frac{d^2x}{dt^2} &= \int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q\frac{du_x}{dt}+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,u_x\frac{dq}{dt} \\ &+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{y_0}^{y}\delta y\,.\,q u_x u_z+\int_{x_0}^{x}\delta x\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_x u_y+\int_{y_0}^{y}\delta y\int_{z_0}^{z}\delta z\,.\,q u_x^2 \end{aligned}\right\}$$

Auf gleichem Wege ergeben sich die Werthe:

$$\left\{\begin{aligned}
M\frac{d^2y}{dt^2} &= \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,\frac{du_y}{dt} + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,u_y\,\frac{dq}{dt} \\
&+ \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\,.\,q\,u_y\,u_z + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_y^2 + \int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_x\,u_y\,, \\
M\frac{d^2z}{dt^2} &= \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,\frac{du_z}{dt} + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,u_z\,\frac{dq}{dt} \\
&+ \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{y_0}^{y}\partial y\,.\,q\,u_z^2 + \int_{x_0}^{x}\partial x\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_y\,u_z + \int_{y_0}^{y}\partial y\int_{z_0}^{z}\partial z\,.\,q\,u_x\,u_z\,,
\end{aligned}\right.$$

und daraus folgen nun für den Punkt $x'y'z'$ mit Berücksichtigung der Gleichungen (a) und (71) die Uebergangsgesetze:

$$73.)\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial\,.\,M\frac{d^2x'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} &= q\,\frac{du_{x'}}{dt} + q\,u_{z'}\,\frac{\partial u_{x'}}{\partial z'} + q\,u_{y'}\,\frac{\partial u_{x'}}{\partial y'} + q\,u_{x'}\,\frac{\partial u_{x'}}{\partial x'} \\
&= q\,\frac{d\,.\,u_{x'}}{dt}\,, \\
\frac{\partial\,.\,M\frac{d^2y'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} &= q\,\frac{du_{y'}}{dt} + q\,u_{z'}\,\frac{\partial u_{y'}}{\partial z'} + q\,u_{y'}\,\frac{\partial u_{y'}}{\partial y'} + q\,u_{x'}\,\frac{\partial u_{y'}}{\partial x'} \\
&= q\,\frac{d\,.\,u_{y'}}{dt}\,, \\
\frac{\partial\,.\,M\frac{d^2z'}{dt^2}}{\partial x'\,\partial y'\,\partial z'} &= q\,\frac{du_{z'}}{dt} + q\,u_{z'}\,\frac{\partial u_{z'}}{\partial z'} + q\,u_{y'}\,\frac{\partial u_{z'}}{\partial y'} + q\,u_{x'}\,\frac{\partial u_{z'}}{\partial x'} \\
&= q\,\frac{d\,.\,u_{z'}}{dt}\,,
\end{aligned}\right.$$

aus welchen man leicht erkennen wird, daß sie auch die Componenten der geometrischen Kraft $\mathfrak{P}$ vorstellen, die in dem Punkte $x'y'z'$ wirkend, dem System dieselbe innere Bewegung ertheilen würde, wie die Gesammtwirkung der äußern und innern Kräfte.

§. 37.

Der bisher betretene Weg führt uns nun zu den allgemeinen Gleichungen der innern Bewegung und des innern Gleichgewichtes eines stetigen Systems von materiellen Punkten, deren gegenseitige Wirkungen nicht bekannt sind, und zwar durch folgende Betrachtung.

Wenn wir uns wie bisher in dem System einen Theil durch drei zu den festen oder parallel fortschreitenden Coordinaten-Ebenen parallele Ebenen in dem Punkte $x'y'z'$ abgegrenzt denken, und den von den weggenommenen Theilen auf die Grenzflächen dieses begrenzten Theiles ausgeübten Druck oder Zug und Schub wie sonst den Widerstand fester Flächen als unbekannte Kräfte in Rechnung bringen, so können wir jenen begrenzten Theil des Systems als frei betrachten, und die Gleichungen für die relative Bewegung desselben werden uns durch die in dem Punkte $x'y'z'$ stattfindenden Uebergangsgesetze die Beziehungen liefern zwischen den auf diesen Punkt ausgeübten innern Wirkungen, den äußern geometrischen Kräften, welche an ihm thätig sind, und seiner innern Beschleunigung.

Sei also $T^{(x)}$ der geometrische Druck oder Zug, den derjenige Theil des Systems auf den Punkt $x'y'z'$ ausübt, welcher durch die zur Achse der x senkrechte Ebene abgeschnitten worden, $T_x^{(x)}$, $T_y^{(x)}$, $T_z^{(x)}$ seine Componenten nach den Achsen der x, y und z; ebenso sei $T^{(y)}$ der geometrische Druck oder Zug, der auf jenen Punkt durch den senkrecht zur Achse der y abgeschnittenen Theil des Systems ausgeübt wird, und $T_x^{(y)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(y)}$ seine drei rechtwinklichen Componenten, und in gleicher Weise sollen $T_x^{(z)}$, $T_y^{(z)}$, $T_z^{(z)}$ die Componenten des geometrischen Zuges $T^{(z)}$ bezeichnen, welchen der senkrecht zur Achse der z weggenommene Theil auf denselben Punkt hervorbringt. Bezeichnen wir dann die entsprechenden Componenten des physischen Druckes oder Zuges, welcher auf je eine der drei ebenen Schnittflächen O_x, O_y, O_z ausgeübt wird, mit $\mathfrak{T}_x^{(x)}$, $\mathfrak{T}_y^{(x)}$, $\mathfrak{T}_z^{(x)}$, $\mathfrak{T}_x^{(y)}$, $\mathfrak{T}_y^{(y)}$, $\mathfrak{T}_z^{(y)}$ und $\mathfrak{T}_x^{(z)}$, $\mathfrak{T}_y^{(z)}$, $\mathfrak{T}_z^{(z)}$, so ist nach den in §. 3 ausgesprochenen Bemerkungen $T_x^{(x)}$ das Aenderungsgesetz von $\mathfrak{T}_x^{(x)}$ in Bezug auf die Aenderung von O_x, also

$$T_x^{(x)} = \frac{\frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(x)}}{\partial y' \partial z'}}{\frac{\partial^2 O_x}{\partial y' \partial z'}} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(x)}}{\partial y' \partial z'},$$

weil für den zur Ebene der $y'z'$ parallelen ebenen Schnitt $\frac{\partial^2 . O_x}{\partial y' \partial z'} = 1$ ist (Buch II., §. 35). Ebenso hat man

$$T_y^{(x)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_y^{(x)}}{\partial y' \partial z'}, \quad T_z^{(x)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_z^{(x)}}{\partial y' \partial z'}, \quad T_x^{(y)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(y)}}{\partial x' \partial z'},$$

$$T_x^{(z)} = \frac{\partial^2 . \mathfrak{T}_x^{(z)}}{\partial x' \partial y'}, \text{ u. s. f.}$$

und umgekehrt ergeben sich damit für den begrenzten Theil des Systems die fördernden physischen Wirkungen:

$$\text{a.)} \begin{cases} \mathfrak{T}_x^{(z)} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' . T_x^{(z)}, \quad \mathfrak{T}_y^{(z)} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' . T_y^{(z)}, \\ \mathfrak{T}_z^{(z)} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' . T_z^{(z)}, \\ \mathfrak{T}_x^{(y)} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{z_0'}^{z'} \partial z . T_x^{(y)}, \quad \mathfrak{T}_y^{(y)} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . T_y^{(y)}, \\ \mathfrak{T}_z^{(y)} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . T_z^{(y)}, \\ \mathfrak{T}_x^{(x)} = \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . T_x^{(x)}, \quad \mathfrak{T}_y^{(x)} = \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . T_y^{(x)}, \\ \mathfrak{T}_z^{(x)} = \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . T_z^{(x)}, \end{cases}$$

von denen je drei mit demselben untern Inder längs derselben Achse thätig sind.

Bezeichnen wir ferner die an dem Punkte $x' y' z'$ wirkenden äußern geometrischen Componenten mit qX, qY, qZ, die entsprechenden Componenten der auf den begrenzten Theil des Systems ausgeübten physischen Wirkung einfach mit $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$, so haben wir (Buch II., §. 146)

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{X} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . qX \; , \quad \mathfrak{Y} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . qY \; , \\ \mathfrak{Z} = \int_{x_0'}^{x'} \partial x' \int_{y_0'}^{y'} \partial y' \int_{z_0'}^{z'} \partial z' . qZ \; ; \end{array}\right\} \text{(b.}$$

damit nehmen die Gleichungen für die relative fortschreitende Bewegung der begrenzten Masse M oder vielmehr ihres Mittelpunktes in Bezug auf die mit dem Mittelpunkte $\mathbf{X}\,\mathbf{Y}\,\mathbf{Z}$ der ganzen Masse parallel fortschreitenden Achsen die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} M \dfrac{d^2 x'}{dt^2} = \mathfrak{X} - M \dfrac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} + \mathfrak{X}_x^{(x)} + \mathfrak{X}_x^{(y)} + \mathfrak{X}_x^{(z)} \\ M \dfrac{d^2 y'}{dt^2} = \mathfrak{Y} - M \dfrac{d^2 \mathbf{Y}}{dt^2} + \mathfrak{X}_y^{(x)} + \mathfrak{X}_y^{(y)} + \mathfrak{X}_y^{(z)} \\ M \dfrac{d^2 z'}{dt^2} = \mathfrak{Z} - M \dfrac{d^2 \mathbf{Z}}{dt^2} + \mathfrak{X}_z^{(x)} + \mathfrak{X}_z^{(y)} + \mathfrak{X}_z^{(z)} \end{array}\right\} ;$$

und geben in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung der Begrenzung für den Punkt $x' y' z'$ die Uebergangsgesetze:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial^3 . M \dfrac{d^2 x'}{dt^2}}{\partial x' \partial y' \partial z'} = \dfrac{\partial^3 . \mathfrak{X}}{\partial x' \partial y' \partial z'} - \dfrac{d^2 \mathbf{X}}{dt^2} \dfrac{\partial^3 . M}{\partial x' \partial y' \partial z'} \\ \qquad + \dfrac{\partial^3 . \mathfrak{X}_x^{(x)}}{\partial x' \partial y' \partial z'} + \dfrac{\partial^3 . \mathfrak{X}_x^{(y)}}{\partial x' \partial y' \partial z'} + \dfrac{\partial^3 . \mathfrak{X}_x^{(z)}}{\partial x' \partial y' \partial z'} , \end{array}\right\}$$

u. s. f.

welche mit Berücksichtigung der Gleichungen (73) und der vorhergehenden Werthe (a) und (b) auf folgende zurückkommen

$$74^a.)\left\{\begin{aligned} q\frac{d.u_{x'}}{dt} &= qX - q\frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2} + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x'} + \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y'} + \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z'}, \\ q\frac{d.u_{y'}}{dt} &= qY - q\frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2} + \frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x'} + \frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y'} + \frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z'}, \\ q\frac{d.u_{z'}}{dt} &= qZ - q\frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2} + \frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x'} + \frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y'} + \frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z'}, \end{aligned}\right.$$

und so die Gleichungen für die innere Bewegung des Punktes $x'y'z'$ vorstellen.

§. 38.

Es wird einleuchten, daß die Gesetze für die drehende Bewegung der begrenzten Masse M keine neuen Beziehungen für die innere Bewegung des Punktes $x'y'z'$ liefern können, da diese Bewegung durch die vorstehenden Gleichungen vollständig bestimmt ist, und die Gleichungen für die drehende Bewegung eines Punktes um den Anfang der Coordinaten unmittelbar aus den Gleichungen seiner Bewegung längs der Coordinatenachsen abgeleitet werden können. Es lassen sich aber durch die Gleichungen der drehenden Bewegung der Masse M, wenn man daraus die Uebergangsgesetze für den Punkt $x'y'z'$ zieht, und sie mit den Gesetzen der drehenden Bewegung dieses Punktes vergleicht, welche aus den Gleichungen (74) durch die in §. 71 des ersten Buches angegebene Behandlung hervorgehen, wichtige Beziehungen zwischen den Größen $T_y^{(x)}$, $T_x^{(y)}$, $T_z^{(x)}$, $T_x^{(z)}$, u. s. f. ableiten, durch welche diese neun Unbekannten auf sechs zurückgeführt werden. Beachtet man übrigens, daß diese Beziehungen von dem Zustand des Systems unabhängig sein müssen, daß sie also ebensowohl für den Zustand des innern Gleichgewichtes, wie für den der Bewegung bestehen, so wird man einsehen, daß es genügt, die einfacheren Gleichungen für das Gleichgewicht der begrenzten Masse M zu Hülfe zu nehmen, um jene Beziehungen zu erhalten.

Seien dazu $\mathfrak{x}_x^{(x)}$, $\mathfrak{y}_x^{(x)}$, $\mathfrak{z}_x^{(x)}$ die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen geometrischen Kräfte $T_x^{(x)}$ oder des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{T}_x^{(x)}$ in Bezug auf ein festes Coordinatensystem, $\mathfrak{x}_y^{(x)}$, $\mathfrak{y}_y^{(x)}$, $\mathfrak{z}_y^{(x)}$

die des Mittelpunktes der Kräfte $T_y^{(x)}$, $\mathfrak{x}_x^{(y)}$, $\mathfrak{y}_x^{(y)}$, $\mathfrak{z}_x^{(y)}$ die des Mittelpunktes der Kräfte $T_x^{(y)}$ u. s. f., so hat man nach der Lehre von der Zusammensetzung paralleler Kräfte (Buch II., §. 23) die Beziehungen:

$$\mathfrak{X}_x^{(x)}\,\mathfrak{x}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,x\,T_x^{(x)} = x \int_{z_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,T_x^{(x)} \quad , \qquad \mathfrak{x}_x^{(x)} = x$$

$$\mathfrak{X}_x^{(x)}\,\mathfrak{y}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z}^{z} dz\,.\,y\,T_x^{(x)} \quad , \qquad \mathfrak{X}_x^{(x)}\,\mathfrak{z}_x^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,z\,T_x^{(x)}$$

$$\mathfrak{X}_y^{(x)}\,\mathfrak{x}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,x\,T_y^{(x)} = x \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,T_y^{(x)} \quad , \qquad \mathfrak{x}_y^{(x)} = x$$

$$\mathfrak{X}_y^{(x)}\,\mathfrak{y}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,y\,T_y^{(x)} \quad , \qquad \mathfrak{X}_y^{(x)}\,\mathfrak{z}_y^{(x)} = \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,z\,T_y^{(x)}$$

u. s. f.

und schließt daraus, was übrigens ohnehin klar ist,

$$\mathfrak{x}_x^{(x)} = \mathfrak{x}_y^{(x)} = \mathfrak{x}_z^{(x)} = x \quad , \qquad \mathfrak{y}_x^{(y)} = \mathfrak{y}_y^{(y)} = \mathfrak{y}_z^{(y)} = y \,,$$

$$\mathfrak{z}_x^{(z)} = \mathfrak{z}_y^{(z)} = \mathfrak{z}_z^{(z)} = z \,.$$

Ferner bezeichnen wir die Coordinaten des Mittelpunktes der parallelen Kräfte X oder des Angriffspunktes der Kraft $\mathfrak{X}$ mit x_1, y_1, z_1, die des Angriffspunktes der $\mathfrak{Y}$ mit x_2, y_2, z_2, die entsprechenden für die Kraft $\mathfrak{Z}$ mit x_3, y_3, z_3, und haben dann die Gleichungen

$$\mathfrak{X} z_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,q\,z\,X \quad , \qquad \mathfrak{X} y_1 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,q\,y\,X \,,$$

$$\mathfrak{Y} x_2 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,q\,x\,Y \quad , \qquad \mathfrak{Z} y_3 = \int_{x_0}^{x} dx \int_{y_0}^{y} dy \int_{z_0}^{z} dz\,.\,q\,y\,Z \,,$$

u. s. f.

Damit werden nun die Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht der begrenzten Masse M längs der festen Coordinatenachsen

$$\text{c.)}\quad\begin{cases} \mathfrak{X} + \mathfrak{T}_x^{(x)} + \mathfrak{T}_x^{(y)} + \mathfrak{T}_x^{(z)} = 0 \\ \mathfrak{Y} + \mathfrak{T}_y^{(x)} + \mathfrak{T}_y^{(y)} + \mathfrak{T}_y^{(z)} = 0 \\ \mathfrak{Z} + \mathfrak{T}_z^{(x)} + \mathfrak{T}_z^{(y)} + \mathfrak{T}_z^{(z)} = 0 \end{cases}$$

und diejenigen für das Gleichgewicht um diese Achsen sind

$$\text{d.)}\quad\begin{cases} 0 = (\mathfrak{Z} y_3 - \mathfrak{Y} z_3) + \left(\mathfrak{T}_z^{(x)}\mathfrak{y}_z^{(x)} - \mathfrak{T}_y^{(x)}\mathfrak{z}_y^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{T}_z^{(y)}\mathfrak{y}_z^{(y)} - \mathfrak{T}_y^{(y)}\mathfrak{z}_y^{(y)}\right) \\ \qquad + \left(\mathfrak{T}_z^{(z)}\mathfrak{y}_z^{(z)} - \mathfrak{T}_y^{(z)}\mathfrak{z}_y^{(z)}\right), \\ 0 = (\mathfrak{X} z_1 - \mathfrak{Z} x_3) + \left(\mathfrak{T}_x^{(x)}\mathfrak{z}_x^{(x)} - \mathfrak{T}_z^{(x)}\mathfrak{x}_z^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{T}_x^{(y)}\mathfrak{z}_x^{(y)} - \mathfrak{T}_z^{(y)}\mathfrak{x}_z^{(y)}\right) \\ \qquad + \left(\mathfrak{T}_x^{(z)}\mathfrak{z}_x^{(z)} - \mathfrak{T}_z^{(z)}\mathfrak{x}_z^{(z)}\right), \\ 0 = (\mathfrak{Y} x_2 - \mathfrak{X} y_1) + \left(\mathfrak{T}_y^{(x)}\mathfrak{x}_y^{(x)} - \mathfrak{T}_x^{(x)}\mathfrak{y}_x^{(x)}\right) + \left(\mathfrak{T}_y^{(y)}\mathfrak{x}_y^{(y)} - \mathfrak{T}_x^{(y)}\mathfrak{y}_x^{(y)}\right) \\ \qquad + \left(\mathfrak{T}_y^{(z)}\mathfrak{x}_y^{(z)} - \mathfrak{T}_x^{(z)}\mathfrak{y}_x^{(z)}\right). \end{cases}$$

Nimmt man dann von diesen Gleichungen die Uebergangsgesetze in Bezug auf die gleichzeitige Aenderung von x, y und z, so geben die drei ersten die Bedingungen:

$$\text{75.)}\quad\begin{cases} qX + \frac{\delta T_x^{(x)}}{\delta x} + \frac{\delta T_x^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta T_x^{(z)}}{\delta z} = 0, \\ qY + \frac{\delta T_y^{(x)}}{\delta x} + \frac{\delta T_y^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta T_y^{(z)}}{\delta z} = 0, \\ qZ + \frac{\delta T_z^{(x)}}{\delta x} + \frac{\delta T_z^{(y)}}{\delta y} + \frac{\delta T_z^{(z)}}{\delta z} = 0, \end{cases}$$

welche übrigens auch aus den Gleichungen (74) hervorgehen, wenn darin die Bedingungen für das innere und äußere Gleichgewicht, nämlich

$$\frac{d \,.\, u_{x'}}{dt} = 0 \;,\quad \frac{d \,.\, u_{y'}}{dt} = 0 \;,\quad \frac{d \,.\, u_{z'}}{dt} = 0$$

und

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0 \;,\quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0 \;,\quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0$$

eingeführt werden. Die Gleichungen (d) geben für den Punkt $x y z$ ebenso die Uebergangsgesetze:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= q(yZ - zY) + \frac{\delta.\left(y T_z^{(x)} - z T_y^{(x)}\right)}{\delta x} + \frac{\delta.\left(y T_z^{(y)} - z T_y^{(y)}\right)}{\delta y} \\
&\quad + \frac{\delta.\left(y T_z^{(z)} - z T_y^{(z)}\right)}{\delta z} \;, \\
0 &= q(zX - xZ) + \frac{\delta.\left(z T_x^{(x)} - x T_z^{(x)}\right)}{\delta x} + \frac{\delta.\left(z T_x^{(y)} - x T_z^{(y)}\right)}{\delta y} \\
&\quad + \frac{\delta.\left(z T_x^{(z)} - x T_z^{(z)}\right)}{\delta z} \;, \\
0 &= q(xY - yX + \frac{\delta.\left(x T_y^{(x)} - y T_x^{(x)}\right)}{\delta x} + \frac{\delta.\left(x T_y^{(y)} - y T_x^{(y)}\right)}{\delta y} \\
&\quad + \frac{\delta.\left(x T_y^{(z)} - y T_x^{(z)}\right)}{\delta z} \;,
\end{aligned}\right\}$$

oder wenn man die Aenderungsgesetze der Producte $x T_y^{(x)}$, $y T_x^{(x)}$, u. s. f. entwickelt, und die Unabhängigkeit der Veränderlichen x, y und z beachtet,

$$
\text{f.)} \quad \left\{
\begin{aligned}
0 &= q(yZ - zY) + \left(y\frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x} - z\frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x}\right) + \left(y\frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y} - z\frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y}\right) \\
&\quad + \left(y\frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z} - z\frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z}\right) + \left(T_z^{(y)} - T_y^{(z)}\right), \\
0 &= q(zX - xZ) + \left(z\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} - x\frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x}\right) + \left(z\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} - x\frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y}\right) \\
&\quad + \left(z\frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} - x\frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z}\right) + \left(T_x^{(z)} - T_z^{(x)}\right), \\
0 &= q(xY - yX) + \left(x\frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} - y\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x}\right) + \left(x\frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y} - y\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y}\right) \\
&\quad + \left(x\frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z} - y\frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z}\right) + \left(T_y^{(x)} - T_x^{(y)}\right).
\end{aligned}
\right.
$$

Multiplizirt man nun die erste der Gleichungen (75) mit y, die zweite mit x und addirt ihre Differenz zu der letzten der vorstehenden Gleichungen, und verfährt in entsprechender Weise in Bezug auf die übrigen Gleichungen, so ergeben sich die drei Beziehungen:

$$
76.) \quad T_y^{(x)} = T_x^{(y)} \quad , \quad T_x^{(z)} = T_z^{(x)} \quad , \quad T_z^{(y)} = T_y^{(z)}
$$

durch welche die neun Unbekannten, $T_x^{(x)}$, $T_y^{(x)}$, etc. auf sechs zurückgeführt werden. Wir können deßhalb die Bezeichnung vereinfachen, und werden nun die längs der Achsen der x, y und z wirkenden, also zu ihren Schnittebenen normalen Spannungen $T_x^{(x)}$, $T_y^{(y)}$, $T_z^{(z)}$ einfach mit T_x, T_y, T_z bezeichnen, die beiden Kräfte $T_y^{(x)}$ und $T_x^{(y)}$ dagegen, welche ihren Angriffspunkt in einer zur Achse der z senkrechten Richtung verschieben wollen, mit S_z, die senkrecht zur Achse der y verschiebenden $T_x^{(z)}$ und $T_z^{(x)}$ mit S_y, und die senkrecht zur x-Achse wirkenden $T_z^{(y)}$ und $T_y^{(z)}$ mit S_x. Damit nehmen die

Gleichungen (74ᵃ) für die innere Bewegung des Punktes $x' y' z'$ in Bezug auf parallel fortschreitende Achsen die Form an:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x'} + \frac{\partial S_z}{\partial y'} + \frac{\partial S_y}{\partial z'} + q\left(X - \frac{d \,.\, u_x'}{dt} - \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2}\right) &= 0 \\
\frac{\partial S_z}{\partial x'} + \frac{\partial T_y}{\partial y'} + \frac{\partial S_x}{\partial z'} + q\left(Y - \frac{d \,.\, u_y'}{dt} - \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}\right) &= 0 \\
\frac{\partial S_y}{\partial x'} + \frac{\partial S_x}{\partial y'} + \frac{\partial T_z}{\partial z'} + q\left(Z - \frac{d \,.\, u_z'}{dt} - \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2}\right) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad (74^b.$$

und geben für das innere Gleichgewicht desselben Punktes die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x'} + \frac{\partial S_z}{\partial y'} + \frac{\partial S_y}{\partial z'} + q\left(X - \frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2}\right) &= 0 \\
\frac{\partial S_z}{\partial x'} + \frac{\partial T_y}{\partial y'} + \frac{\partial S_x}{\partial z'} + q\left(Y - \frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}\right) &= 0 \\
\frac{\partial S_y}{\partial x'} + \frac{\partial S_x}{\partial y'} + \frac{\partial T_z}{\partial z'} + q\left(Z - \frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2}\right) &= 0
\end{aligned}\right\} . \quad (77.$$

Wenn das System sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, die Lage der einzelnen Punkte also auf ein unbewegliches Coordinatensystem bezogen wird, so werden die Beschleunigungen $q\frac{d^2 \mathfrak{X}}{dt^2}$, $q\frac{d^2 \mathfrak{Y}}{dt^2}$, $q\frac{d^2 \mathfrak{Z}}{dt^2}$ Null, und man hat für die innere Bewegung des Punktes xyz die einfacheren Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x} + \frac{\partial S_z}{\partial y} + \frac{\partial S_y}{\partial z} + q\left(X - \frac{d \,.\, u_x}{dt}\right) &= 0 \\
\frac{\partial S_z}{\partial x} + \frac{\partial T_y}{\partial y} + \frac{\partial S_x}{\partial z} + q\left(Y - \frac{d \,.\, u_y}{dt}\right) &= 0 \\
\frac{\partial S_y}{\partial x} + \frac{\partial S_x}{\partial y} + \frac{\partial T_z}{\partial z} + q\left(Z - \frac{d \,.\, u_z}{dt}\right) &= 0
\end{aligned}\right\} ; \quad (78.$$

für das innere Gleichgewicht desselben die Bedingungen:

75b.)
$$\begin{cases} \frac{\delta T_x}{\delta x} + \frac{\delta S_z}{\delta y} + \frac{\delta S_y}{\delta z} + qX = 0 \,, \\ \frac{\delta S_z}{\delta x} + \frac{\delta T_y}{\delta y} + \frac{\delta S_x}{\delta z} + qY = 0 \,, \\ \frac{\delta S_y}{\delta x} + \frac{\delta S_x}{\delta y} + \frac{\delta T_z}{\delta z} + qZ = 0 \,, \end{cases}$$

welche unter Berücksichtigung der Beziehungen (76) mit den direct abgeleiteten Gleichungen (75) übereinkommen.

§. 39.

Die Gleichungen (76) im vorigen Paragraphen sind nur einzelne besondere Fälle einer allgemeinen Eigenschaft der Kräfte T und S, welche sich durch folgende Betrachtung ableiten läßt.

Die vorhergehenden Gleichungen zeigen, daß die geometrischen Kräfte T nicht gleichartig sind mit den geometrischen Kräften qX, qY, qZ, wie es auch in der Natur der Sache liegt, da die erstern Aenderungsgesetze physischer Kräfte in Bezug auf die Aenderung der Fläche, die letztern dagegen Aenderungsgesetze physischer Kräfte in Bezug auf die Aenderung des Raumes vorstellen; es sind daher diese letztern erst mit den Aenderungsgesetzen der Kräfte T in Bezug auf die Aenderung einer Länge oder Entfernung gleichartig, und zwar zeigen die Gleichungen (75a), daß diese Aenderungsgesetze immer in Bezug auf die Aenderung der senkrechten Entfernung der entsprechenden Schnittebene vom Anfangspunkt zu nehmen sind. Denn vergleicht man diese Gleichungen mit den Gleichgewichtsbedingungen eines freien materiellen Punktes, so sieht man, daß die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\delta T_x^{(x)}}{\delta x} \,, \qquad \frac{\delta T_y^{(x)}}{\delta x} \,, \qquad \frac{\delta T_z^{(x)}}{\delta x}$$

als die zu den Coordinaten-Achsen parallelen Componenten einer Kraft $\frac{\delta T^{(x)}}{\delta x}$ zu betrachten sind, welche durch das Aenderungsgesetz der geometrischen Wirkung $T^{(x)}$ in einem Punkte der zur Achse der x senkrechten Schnittebene in Bezug auf die Aenderung ihrer senkrechten Entfernung x

vom Anfangspunkte gemessen wird. Ebenso sind die Aenderungsgesetze $\frac{\delta T_x^{(y)}}{\delta y}$, $\frac{\delta T_y^{(y)}}{\delta y}$, $\frac{\delta T_z^{(y)}}{\delta y}$ die Componenten der Kraft $\frac{\delta T^{(y)}}{\delta y}$, also die Componenten des Aenderungsgesetzes der geometrischen Wirkung $T^{(y)}$ in einem Punkte der zur y-Achse senkrechten Schnittebene in Bezug auf die Aenderung ihrer senkrechten Entfernung y vom Anfangspunkte, u. s. f.

Legen wir nun durch diesen Anfangspunkt drei neue unter sich senkrechte Achsen der ξ, η, ζ, begrenzen das System in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ durch drei zu diesen Achsen senkrechte Ebenen, und bezeichnen mit $T_\xi^{(\xi)}$, $T_\eta^{(\xi)}$, $T_\zeta^{(\xi)}$ die Componenten der geometrischen Spannung $T^{(\xi)}$, welche in einem Punkte der zur ξ-Achse senkrechten Schnittebene stattfindet, mit $T_\xi^{(\eta)}$, $T_\eta^{(\eta)}$, $T_\zeta^{(\eta)}$ die Componenten der Kraft $T^{(\eta)}$ in einem Punkte der zur η-Achse senkrechten Schnittebene, mit $T_\xi^{(\zeta)}$, $T_\eta^{(\zeta)}$, $T_\zeta^{(\zeta)}$ die entsprechenden Componenten der Kraft $T^{(\zeta)}$, welche die geometrische Spannung des von der dritten Schnittebene abgetrennten Theiles für einen Punkt dieser Schnittebene vorstellt, dann noch mit $q\,\Xi$, $q\,H$, $q\,Z$ die Componenten der äußern geometrischen Kraft für den Punkt $\xi\eta\zeta$, so haben wir für das Gleichgewicht dieses Punktes in Bezug auf die Achsen der ξ, η, ζ die den Gleichungen (75ª) im vorigen Paragraphen entsprechenden Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\delta T_\xi^{(\xi)}}{\delta \xi} + \frac{\delta T_\xi^{(\eta)}}{\delta \eta} + \frac{\delta T_\xi^{(\zeta)}}{\delta \zeta} + q\,\Xi = 0\\
\frac{\delta T_\eta^{(\xi)}}{\delta \xi} + \frac{\delta T_\eta^{(\eta)}}{\delta \eta} + \frac{\delta T_\eta^{(\zeta)}}{\delta \zeta} + q\,H = 0\\
\frac{\delta T_\zeta^{(\xi)}}{\delta \xi} + \frac{\delta T_\zeta^{(\eta)}}{\delta \eta} + \frac{\delta T_\zeta^{(\zeta)}}{\delta \zeta} + q\,Z = 0
\end{aligned}\right\}, \quad (a.$$

Sind dann a, b, c, a′, b′, c′, a″, b″, c″ die Cosinus der Winkel $\widehat{\xi x}$, $\widehat{\xi y}$, $\widehat{\xi z}$, $\widehat{\eta x}$, $\widehat{\eta y}$, u. s. f., welche jede der drei neuen Achsen mit der ursprünglichen der x, y, z bildet, so hat man

$$\text{b.)}\quad \begin{cases} a\,\Xi + a'\,H + a''\,Z = X\,, \\ b\,\Xi + b'\,H + b''\,Z = Y\,, \\ c\,\Xi + c'\,H + c''\,Z = Z\,, \end{cases}$$

und in gleicher Weise ergeben sich die Beziehungen:

$$\text{c.)}\quad \begin{cases} a\,\frac{\delta T^{(\xi)}_{\xi}}{\delta \xi} + a'\,\frac{\delta T^{(\xi)}_{\eta}}{\delta \xi} + a''\,\frac{\delta T^{(\xi)}_{\zeta}}{\delta \xi} = \frac{\delta T^{(\xi)}_{x}}{\delta \xi} \\ a\,\frac{\delta T^{(\eta)}_{\xi}}{\delta \eta} + a'\,\frac{\delta T^{(\eta)}_{\eta}}{\delta \eta} + a''\,\frac{\delta T^{(\eta)}_{\zeta}}{\delta \eta} = \frac{\delta T^{(\eta)}_{x}}{\delta \eta} \\ a\,\frac{\delta T^{(\zeta)}_{\xi}}{\delta \zeta} + a'\,\frac{\delta T^{(\zeta)}_{\eta}}{\delta \zeta} + a''\,\frac{\delta T^{(\zeta)}_{\zeta}}{\delta \zeta} = \frac{\delta T^{(\zeta)}_{x}}{\delta \zeta} \\ b\,\frac{\delta T^{(\xi)}_{\xi}}{\delta \xi} + b'\,\frac{\delta T^{(\xi)}_{\eta}}{\delta \xi} + b''\,\frac{\delta T^{(\xi)}_{\zeta}}{\delta \xi} = \frac{\delta T^{(\xi)}_{y}}{\delta \xi} \\ b\,\frac{\delta T^{(\eta)}_{\xi}}{\delta \eta} + b'\,\frac{\delta T^{(\eta)}_{\eta}}{\delta \eta} + b''\,\frac{\delta T^{(\eta)}_{\zeta}}{\delta \eta} = \frac{\delta T^{(\eta)}_{y}}{\delta \eta} \\ \text{u. s. f.,} \end{cases}$$

worin $\frac{\delta T^{(\xi)}_{x}}{\delta \xi}$, $\frac{\delta T^{(\xi)}_{y}}{\delta \xi}$, $\frac{\delta T^{(\xi)}_{z}}{\delta \xi}$ die Componenten der Kraft $\frac{\delta T^{(\xi)}}{\delta \xi}$ nach den Achsen der x, y, z vorstellen, $\frac{\delta T^{(\eta)}_{x}}{\delta \eta}$, $\frac{\delta T^{(\eta)}_{y}}{\delta \eta}$, $\frac{\delta T^{(\eta)}_{z}}{\delta \eta}$ die entsprechenden der Kraft $\frac{\delta T^{(\eta)}}{\delta \eta}$ u. s. f.

Multiplizirt man nun die Gleichungen (a) der Reihe nach zuerst mit a, a', a'', dann mit b, b', b'', und zuletzt mit c, c', c'' und nimmt jedesmal die Summe der Producte, so findet man mit Berücksichtigung der Gleichungen (b) und (c) die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + qX = 0 \\
\frac{\partial T_y^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_y^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_y^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + qY = 0 \\
\frac{\partial T_z^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_z^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_z^{(\zeta)}}{\partial \zeta} + qZ = 0
\end{aligned}\right\}, \qquad (d.$$

welche nun wieder das Gleichgewicht längs den Achsen der x, y, z, aber mittels der nach diesen Achsen zerlegten Kräfte $\frac{\partial T^{(\xi)}}{\partial \xi}$, $\frac{\partial T^{(\eta)}}{\partial \eta}$, $\frac{\partial T^{(\zeta)}}{\partial \zeta}$ ausdrücken und durch ihre Form die oben besprochene Eigenschaft der Kräfte T für beliebige Schnittebenen bestätigen. Vergleichen wir ferner die Gleichungen (d) mit den Bedingungen (75ª), so erhalten wir zwischen den Kräften $T^{(\xi)}$, $T^{(\eta)}$ und $T^{(\zeta)}$, welche längs der neuen Schnittebenen thätig sind und den Kräften $T^{(x)}$, $T^{(y)}$, $T^{(z)}$, welche die innere Wirkung in den ursprünglichen Schnittebenen ausdrücken, die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial z} \\
\frac{\partial T_y^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_y^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_y^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_y^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_y^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_y^{(z)}}{\partial z} \\
\frac{\partial T_z^{(\xi)}}{\partial \xi} + \frac{\partial T_z^{(\eta)}}{\partial \eta} + \frac{\partial T_z^{(\zeta)}}{\partial \zeta} = \frac{\partial T_z^{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial T_z^{(y)}}{\partial y} + \frac{\partial T_z^{(z)}}{\partial z}
\end{aligned}\right\}, \quad (e.$$

worin die Kräfte T auf der linken Seite als Functionen von ξ, η, ζ, auf der rechten Seite als Functionen von x, y, z gedacht sind. Betrachten wir daher die Kräfte T auf der rechten Seite auch als Functionen von ξ, η, ζ und nehmen diese letztern Veränderlichen als willkürliche Functionen der x, y, z, insofern nämlich willkürlich, als in den Werthen von a, b, c, etc. eine freie Wahl gestattet ist, so geben uns die bekannten Gleichungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \xi = ax + by + cz \\ \eta = a'x + b'y + c'z \\ \zeta = a''x + b''y + c''z \end{array}\right.$$

die Aenderungsgesetze:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = a \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = a' \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = a''$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = b \quad , \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = b' \quad , \quad \frac{\partial \zeta}{\partial y} = b''$$

u. s. f.

und wenn man beachtet, daß man nun auch die Beziehungen hat:

$$\frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial x} = \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \zeta} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

$$= a \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \xi} + a' \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \eta} + a'' \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \zeta}$$

$$\frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial y} = b \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \xi} + b' \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \eta} + b'' \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \zeta}$$

u. s. f.

so nimmt die erste der Gleichungen (e) die Form an:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial T_x^{(\xi)}}{\partial \xi} - a \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \xi} - b \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \xi} - c \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial \xi} \\ + \frac{\partial T_x^{(\eta)}}{\partial \eta} - a' \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \eta} - b' \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \eta} - c' \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial \eta} \\ + \frac{\partial T_x^{(\zeta)}}{\partial \zeta} - a'' \frac{\partial T_x^{(x)}}{\partial \zeta} - b'' \frac{\partial T_x^{(y)}}{\partial \zeta} - c'' \frac{\partial T_x^{(z)}}{\partial \zeta} \end{array}\right\} = 0 ,$$

oder wenn noch die ξ, η, ζ als willkürliche Functionen einer neuen Veränderlichen s gedacht werden, von der Art, daß $\frac{\partial \xi}{\partial s}$, $\frac{\partial \eta}{\partial s}$, $\frac{\partial \zeta}{\partial s}$

e Cosinus der Winkel sind, durch welche die beliebige Richtung des Überganges von dem Punkte $\xi\,\eta\,\zeta$ zu einem folgenden bestimmt wird (vergl. Einl. §§. 32 und 35),

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\delta\left(T_x^{(\xi)} - a\, T_x^{(x)} - b\, T_x^{(y)} - c\, T_x^{(z)}\right)}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta \xi} \\ + &\frac{\delta\left(T_x^{(\eta)} - a'\, T_x^{(x)} - b'\, T_x^{(y)} - c'\, T_x^{(z)}\right)}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta \eta} \\ + &\frac{\delta\left(T_x^{(\zeta)} - a''\, T_x^{(x)} - b''\, T_x^{(y)} - c''\, T_x^{(z)}\right)}{\delta s}\frac{\delta s}{\delta \zeta} \end{aligned}\right\} = 0\,.$$

Diese Gleichung muß für jede Richtung des Ueberganges oder für alle möglichen Werthe der willkürlichen Uebergangsgesetze $\frac{\delta s}{\delta \xi}$, $\frac{\delta s}{\delta \eta}$, $\frac{\delta s}{\delta \zeta}$ befriedigt werden, und dieß ist nur möglich, wenn die Factoren dieser Uebergangsgesetze selbst Null sind. Man erhält durch diesen Schluß, und wenn dieselben Umwandlungen auch mit den beiden letzten der Gleichungen (e) vorgenommen werden, die wichtigen Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} T_x^{(\xi)} &= a\, T_x^{(x)} + b\, T_x^{(y)} + c\, T_x^{(z)} \\ T_y^{(\xi)} &= a\, T_y^{(x)} + b\, T_y^{(y)} + c\, T_y^{(z)} \\ T_z^{(\xi)} &= a\, T_z^{(x)} + b\, T_z^{(y)} + c\, T_z^{(z)} \\ T_x^{(\eta)} &= a'\, T_x^{(x)} + b'\, T_x^{(y)} + c'\, T_x^{(z)} \\ T_y^{(\eta)} &= a'\, T_y^{(x)} + b'\, T_y^{(y)} + c'\, T_y^{(z)} \\ T_z^{(\eta)} &= a'\, T_z^{(x)} + b'\, T_z^{(y)} + c'\, T_z^{(z)} \\ &\text{u. s. f.} \end{aligned}\right\}; \qquad (79.$$

welche folgende allgemeine Gegenseitigkeit der Kräfte T für verschiedene Schnittebenen aussprechen:

Wenn man die Spannungen im Schnittpunkte dreier unter sich rechtwinkliger Ebenen nach den Normalen zu diesen Ebenen wie nach drei rechtwinkligen Achsen zerlegt, diese Componenten in Längeneinheiten auf die entsprechende Normale aufträgt, und dann auf irgend eine beliebige neue Richtung projicirt, so gibt die Summe der Projectionen der zu derselben Achse parallelen Componenten die derselben Achse entsprechende Componente des geometrischen Zuges, welcher in jenem Punkte für eine zu der neuen Richtung senkrechte Schnittebene stattfindet, oder welche die Wirkung des durch diese Ebene abgeschnittenen Theiles des Systems auf jenen Punkt vorstellt. Verbindet man dann die Gleichungen (76) mit den vorhergehenden Beziehungen, so nehmen die drei ersten derselben die Form an:

$$80^a.)\quad \left\{\begin{array}{l} T_x^{(\xi)} = a\,T_x^{(x)} + b\,T_y^{(x)} + c\,T_z^{(x)} \\ T_y^{(\xi)} = a\,T_x^{(y)} + b\,T_y^{(y)} + c\,T_z^{(y)} \\ T_z^{(\xi)} = a\,T_x^{(z)} + b\,T_y^{(z)} + c\,T_z^{(z)} \end{array}\right.$$

oder die noch einfachere:

$$80^b.)\quad T_x^{(\xi)} = T_\xi^{(x)}\,,\quad T_y^{(\xi)} = T_\xi^{(y)}\,,\quad T_z^{(\xi)} = T_\xi^{(z)}\,,$$

und sprechen nun mit Rücksicht auf die beliebige Lage der Achsen der x, y, z und der ξ, η, ζ den allgemeinen Satz aus:

Wenn ein stetiges System in einem beliebigen Punkte durch zwei beliebige Ebenen getheilt wird, so gibt die innere geometrische Wirkung für die erste Schnittebene nach der Normalen zu der zweiten dieselbe rechtwinklige Componente, wie die geometrische Spannung in der zweiten Schnittebene nach der Normalen zur ersten.

Aus diesem Satze, von welchem die Gleichungen (76), wie schon bemerkt, nur besondere Fälle sind, folgt weiter, daß wenn in einem System der geometrische Zug oder Druck für jede ebene Schnittfläche normal zu dieser gerichtet ist, er auch für jede Schnittfläche dieselbe Größe hat. Der umgekehrte Satz, daß die Spannungen in jeder Schnittebene normal zu dieser gerichtet sind, wenn sie alle gleiche Größe haben, ist aber, wie ich später zeigen werde, nur dann richtig, wenn die Spannungen auch alle gleichen Sinn

haben, d. h. entweder alle Zugkräfte oder alle Druckkräfte vorstellen, und diese besondere Eigenschaft ist es namentlich, welche die flüssigen Systeme von den stetigen veränderlichen Systemen der festen Aggregatform, die wir im gegenwärtigen Buche weiter untersuchen werden, unterscheidet.

§. 40.

Die Beziehungen, welche die Gleichungen (79) und (80) zwischen den Kräften T für verschiedene Schnittebenen feststellen, führen noch zu weitern wichtigen Folgerungen, welche sich am leichtesten ergeben, wenn wir jene Beziehungen anschaulich machen und die um einen Punkt herum stattfindenden Verhältnisse zusammen in einem geometrischen Bilde darstellen, wie wir es für die Massenmomente im vorhergehenden Buche gethan haben.

Durch den Punkt M oder xyz des Systems legen wir drei unter sich senkrechte Achsen, welche zu den Achsen der x, y und z parallel sind und dann noch eine vierte Gerade, welche gegen die erstern eine beliebige Lage hat, und daher mit ihnen die veränderlichen Winkel λ, μ, ν bildet; zu jeder dieser Geraden denken wir uns eine senkrechte Schnittebene und bezeichnen die geometrischen Spannungen für die drei ersten mit A, B, C, für die letzte mit T, ihre Componenten nach den Achsen durch A_x, B_x, C_x, T_x, A_y, B_y, C_y, T_y, u. s. f. Die Gleichungen (79) geben dann zwischen diesen Größen die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned} T_x &= A_x \cos\lambda + B_x \cos\mu + C_x \cos\nu \\ T_y &= A_y \cos\lambda + B_y \cos\mu + C_y \cos\nu \\ T_z &= A_z \cos\lambda + B_z \cos\mu + C_z \cos\nu \end{aligned}\right\} , \qquad \text{(a.}$$

und wenn man diese in's Quadrat erhebt und summirt, so folgt, mit der Beachtung, daß man hat

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = A^2 \quad , \quad B_x^2 + B_y^2 + B_z^2 = B^2$$

$$A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z = AB \cos \widehat{AB}$$

u. s. f.

der Ausdruck:

$$\left.\begin{aligned} T^2 = {} & A^2 \cos^2\lambda + B^2 \cos^2\mu + C^2 \cos^2\nu \\ & + 2AB \cos\widehat{AB} \cos\lambda \cos\mu + 2AC \cos\widehat{AC} \cos\lambda \cos\nu + 2BC \cos\widehat{BC} \cos\mu \cos\nu \end{aligned}\right\} , \qquad \text{(b.}$$

aus welchem sich für beliebige Werthe von λ, μ, ν oder für jede Lage der vierten Schnittebene zwei gleiche und entgegengesetzte Werthe für T ergeben, und welcher dadurch zeigt, **daß es in dem Punkte xyz für jede Schnittebene zwei gleiche und entgegengesetzte Kräfte T gibt**, was übrigens ohnehin einleuchtet, da jeder der beiden Theile des Systems, welche durch eine solche Schnittebene entstehen, auf den andern die gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Wirkung ausüben muß.

Denkt man sich nun auf die vierte der Lage nach veränderliche Gerade von dem Punkte M aus eine Länge r aufgetragen, welche der Größe T verkehrt proportional ist, so daß man hat

$$r = \frac{1}{T} \; ,$$

und bezeichnet die Coordinaten des Endpunktes dieser Länge r in Bezug auf die Achsen, deren Anfangspunkt der Punkt M ist mit x', y', z', so hat man

$$x' = r \cos\lambda \quad , \quad y' = r\cos\mu \quad , \quad z' = r\cos\nu$$

und die Gleichung (b) nimmt damit die Form an:

$$b'.)\left\{\begin{array}{l} 1 = A^2 x'^2 + B^2 y'^2 + C^2 z'^2 \\ \quad + 2AB\cos\widehat{AB}.x'y' + 2AC\cos\widehat{AC}.x'z' + 2BC\cos\widehat{BC}.y'z' \; , \end{array}\right.$$

unter welcher sie als die eines **Ellipsoides** betrachtet werden kann, dessen Mittelpunkt mit dem Punkte xyz zusammenfällt, dessen Achsen jedoch im Allgemeinen nicht mit den Achsen der x, y, z parallel sind. Man kann aber die Achsen der x', y', z' immer so drehen, daß sie mit den Achsen des Ellipsoids zusammenfallen, und wenn man die diesen neuen Achsen der ξ, η, ζ entsprechenden Werthe von A, B, C, d. h. die geometrischen Zugkräfte für die zu diesen neuen Achsen senkrechten Schnittebenen mit $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ bezeichnet, so muß man haben

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 0 \quad , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = 0 \quad , \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cos\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 0 \; ,$$

oder da im Allgemeinen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ nicht Null sind

$$\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 0 \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = 0 \quad , \quad \cos\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 0 \; ,$$

woraus zunächst folgt, daß die für die neuen Schnittebenen sich ergebenden Spannungen 𝔄, 𝔅, ℭ senkrecht zu einander gerichtet sind.

Für diese neuen Achsen wird dann die Gleichung des Ellipsoids einfach

$$1 = \mathfrak{A}^2 \xi^2 + \mathfrak{B}^2 \eta^2 + \mathfrak{C}^2 \zeta^2 \qquad (81.$$

und zeigt, daß die drei Achsen desselben den Zugkräften 𝔄, 𝔅, ℭ verkehrt proportional sind, und daß daher unter diesen die kleinste und die größte geometrische Spannung unter allen, welche um den Punkt M herum stattfinden, enthalten ist.

Die Spannung T ist im Allgemeinen nicht nach dem Fahrstrahl r gerichtet, da dieser normal zur Schnittebene ist, und man hat für den Winkel ϑ, welchen die Richtung von T mit dem Fahrstrahl bildet, die Beziehung:

$$T \cos\vartheta = T_x \cos\lambda + T_y \cos\mu + T_z \cos\nu ,$$

worin $T \cos\vartheta$ offenbar die zur Schnittebene normale Componente von T vorstellt. Führt man dann die Werthe (a) für T_x, T_y und T_z ein, so kann man den Ausdruck für $T \cos\vartheta$ in doppelter Weise ordnen; einmal hat man

$$\left.\begin{aligned} T \cos\vartheta = & (A_x \cos\lambda + B_x \cos\mu + C_x \cos\nu) \cos\lambda \\ & + (A_y \cos\lambda + B_y \cos\mu + C_y \cos\nu) \cos\mu \\ & + (A_z \cos\lambda + B_z \cos\mu + C_z \cos\nu) \cos\nu \end{aligned}\right\} \qquad (c.$$

und dann wird auch

$$\left.\begin{aligned} T \cos\vartheta = & (A_x \cos\lambda + A_y \cos\mu + A_z \cos\nu) \cos\lambda \\ & + (B_x \cos\lambda + B_y \cos\mu + B_z \cos\nu) \cos\mu \\ & + (C_x \cos\lambda + C_y \cos\mu + C_z \cos\nu) \cos\nu \end{aligned}\right\} \qquad (c'.$$

und die Vergleichung dieser beiden Ausdrücke führt unmittelbar ohne die Gleichungen (76) zu den Beziehungen (80^a) und (80^b), in welchen jene selbst enthalten sind.

Bezeichnen wir nun diesen Beziehungen gemäß, die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der innern Kraft 𝔄 mit $\mathfrak{A}_\xi$,

$\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$, die der Spannung $\mathfrak{B}$ mit $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{B}_\eta$, $\mathfrak{F}$, und die der Kraft $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{C}_\zeta$, so gehen die Bedingungen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B}\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = 0 \quad , \quad \mathfrak{A}\mathfrak{C}\cos\widehat{\mathfrak{A}\mathfrak{C}} = 0 \quad , \quad \mathfrak{B}\mathfrak{C}\cos\widehat{\mathfrak{B}\mathfrak{C}} = 0$$

in die folgenden über

$$82^a.) \quad \begin{cases} (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta)\mathfrak{D} + \mathfrak{E}\mathfrak{F} = 0 \ , \\ (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{C}_\zeta)\mathfrak{E} + \mathfrak{D}\mathfrak{F} = 0 \ , \\ (\mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta)\mathfrak{F} + \mathfrak{D}\mathfrak{E} = 0 \ , \end{cases}$$

und geben die neuen Bedingungen:

$$d.) \qquad \mathfrak{D} = 0 \quad , \quad \mathfrak{E} = 0 \quad , \quad \mathfrak{F} = 0 \ ,$$

oder

$$e.) \begin{cases} \mathfrak{D}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{C}_\zeta)(\mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta) \quad , \quad \mathfrak{E}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta)(\mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta) \\ \mathfrak{F}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta)(\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{C}_\zeta) \ . \end{cases}$$

Die drei ersten derselben führen auf die weitere Folgerung:

$$\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B}_\eta = \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C}_\zeta = \mathfrak{C}$$

und zeigen dadurch, daß die Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ nach den Achsen der ξ, η, ζ selbst, also normal zu ihren Schnittebenen gerichtet sind; wir wollen sie daher **Hauptspannungen** für den Punkt M nennen; ihre Richtungen, oder die Achsen des Ellipsoids (81) die **Spannungs-Achsen** und dieses Ellipsoid selbst **Ellipsoid der Spannungen** für den Punkt M.

Aus dem Vorhergehenden werden wir demnach den Schluß ziehen, daß es für jeden Punkt eines stetigen Systems drei unter sich rechtwinklige Spannungsachsen gibt, oder drei senkrechte Schnittebenen, zu welchen der geometrische Zug oder Druck normal gerichtet ist.

Die Bedingungen (e) führen durch die Gleichungen:

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{A}_\xi^2 + \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{E}^2 \quad , \quad \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{D}^2 + \mathfrak{B}_\eta^2 + \mathfrak{F}^2 \quad , \quad \text{u. s. f.}$$

zu den Bedingungen:

$$\mathfrak{A}^2 = \mathfrak{B}^2 = \mathfrak{C}^2 = (\mathfrak{A}_\xi + \mathfrak{B}_\eta + \mathfrak{C}_\zeta)^2 ,$$

sie entsprechen also nur dem besondern Falle, wo die Spannungen in drei unter sich senkrechten Schnittebenen gleich sind; in diesem Falle geht aber das Ellipsoid (81) in eine Kugelfläche über und zeigt, daß dann die Spannungen für alle Schnittflächen gleich sind. Ich werde auf diesen Fall zurückkommen.

Nach dem Vorhergehenden können wir nun die Größe der drei Hauptspannungen und die Lage der Spannungsachsen in Bezug auf drei andere unter sich rechtwinkliche Achsen, für welche die geometrischen Spannungen A, B, C der Größe und Richtung nach bekannt sind, dadurch bestimmen, daß wir die Lage der Normalen einer Schnittebene in dem Punkte M suchen, in welcher die geometrische Spannung T normal zu derselben gerichtet ist. Für diese Schnittebene wird die Richtung der entsprechenden Spannung, die wir mit $\widehat{T}$ bezeichnen wollen, mit dem entsprechenden Fahrstrahl $\widehat{r}$ zusammenfallen, man wird also haben

$$\widehat{T}_x = \widehat{T}\cos\lambda \quad , \quad \widehat{T}_y = \widehat{T}\cos\mu \quad , \quad \widehat{T}_z = \widehat{T}\cos\nu$$

woraus sich mit den Werthen (a) die Bedingungen ergeben:

$$\left.\begin{aligned} (\widehat{T} - A_x)\cos\lambda - B_x\cos\mu - C_x\cos\nu &= 0 \\ (\widehat{T} - B_y)\cos\mu - A_y\cos\lambda - C_y\cos\nu &= 0 \\ (\widehat{T} - C_z)\cos\nu - A_z\cos\lambda - B_z\cos\mu &= 0 \end{aligned}\right\} . \qquad \text{(f.}$$

Eliminirt man aus diesen die Winkel-Functionen $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$, und ersetzt die Größen $B_x = A_y$ durch D, $C_x = A_z$ durch E, $C_y = B_z$ durch F, so findet man die nachstehende Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} (\widehat{T} - A_x)(\widehat{T} - B_y)(\widehat{T} - C_z) - F^2(\widehat{T} - A_x) \\ - E^2(\widehat{T} - B_y) - D^2(\widehat{T} - C_z) + 2DEF = 0 \end{aligned}\right\} , \qquad \text{(82}^b.$$

welche in Bezug auf $\widehat{T}$ vom dritten Grade ist und durch ihre drei Wurzeln die Größe der drei Hauptspannungen gibt. Hat man

diese bestimmt, so wird man mittels der Gleichungen (f) und der Bedingungsgleichung:

$$\cos^2\lambda + \cos^2\mu + \cos^2\nu = 1$$

die entsprechenden Werthe von λ, μ, ν für die Richtungen der Normalen zu den betreffenden Schnittebenen oder für die Richtungen der Spannungsachsen erhalten.

In Bezug auf die Spannungsachsen und mit den Hauptspannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ hat man nun für die Componenten der Spannung T in einer beliebigen Schnittebene, deren Normale die Winkel λ, μ, ν mit jenen Achsen bildet, die einfachen Werthe:

$$T_\xi = \mathfrak{A} \cos\lambda \quad , \quad T_\eta = \mathfrak{B} \cos\mu \quad , \quad T_\zeta = \mathfrak{C} \cos\nu \quad ,$$

und für die Winkel $\widehat{T\xi}$, $\widehat{T\eta}$, $\widehat{T\zeta}$, welche ihre Richtung mit jenen Achsen einschließt, die Functionen:

$$\cos\widehat{T\xi} = \frac{\mathfrak{A}}{T}\cos\lambda = \mathfrak{A}\,\xi \quad , \quad \cos\widehat{T\eta} = \frac{\mathfrak{B}}{T}\cos\mu = \mathfrak{B}\,\eta$$

$$\cos\widehat{T\zeta} = \frac{\mathfrak{C}}{T}\cos\nu = \mathfrak{C}\,\zeta \;;$$

man schließt daraus, daß diese Richtung normal ist zu einer Fläche, welche durch die Gleichung:

$$83) \qquad \mathfrak{A}\,\xi_{,}^2 + \mathfrak{B}\,\eta_{,}^2 + \mathfrak{C}\,\zeta_{,}^2 = \pm 1$$

vorgestellt wird, und zwar in dem Punkte, wo der durch den Punkt $\xi\eta\zeta$ des Ellipsoids gezogene Fahrstrahl r, dieselbe schneidet, für welchen man also die Beziehungen hat:

$$\xi_{,} = r_{,} \cos\lambda = r_{,}\frac{\xi}{r} \;,\quad \eta_{,} = r_{,}\cos\mu = r_{,}\frac{\eta}{r} \;,\quad \zeta_{,} = r_{,}\cos\nu = r_{,}\frac{\zeta}{r} \;.$$

Denn die Winkel $\lambda_{,}$, $\mu_{,}$, $\nu_{,}$, welche die Normale in dem Punkte $\xi_{,}\eta_{,}\zeta_{,}$ der Fläche (83) mit den Achsen bildet, werden bestimmt durch die Gleichungen:

$$\cos\lambda_, = \frac{\mathfrak{A}\xi_,}{\sqrt{\mathfrak{A}^2\xi_,^2+\mathfrak{B}^2\eta_,^2+\mathfrak{C}^2\zeta_,^2}} \quad , \quad \cos\mu_, = \frac{\mathfrak{B}\eta_,}{\mathfrak{A}\xi_,}\cos\lambda_,$$

$$\cos\nu_, = \frac{\mathfrak{C}\zeta_,}{\mathfrak{A}\xi_,}\cos\lambda_, \ ,$$

und wenn man für $\xi_,$, $\eta_,$, $\zeta_,$ die vorstehenden Werthe einführt und die Gleichung (81) beachtet, so findet man

$$\cos\lambda_, = \mathfrak{A}\xi \quad , \quad \cos\mu_, = \mathfrak{B}\eta \quad , \quad \cos\nu_, = \mathfrak{C}\zeta \ ,$$

wie behauptet wurde.

Man wird aus dieser Betrachtung leicht schließen, daß der zum Punkte $\xi, \eta, \zeta,$ der Fläche (83) vom Mittelpunkte aus gezogene Fahrstrahl r, der Quadratwurzel aus der zur entsprechenden Schnittebene normalen Componenten $T\cos\vartheta$ verkehrt proportional sein wird, und in der That gibt die Gleichung (c) oder (c′) unter der Form:

$$T\cos\vartheta = A_x\cos^2\lambda + B_y\cos^2\mu + C_z\cos^2\nu$$
$$+ 2D\cos\lambda\cos\mu + 2E\cos\lambda\cos\nu + 2F\cos\mu\cos\nu \ ,$$

wenn darin $\cos\lambda = \frac{x_,}{r_,}$, $\cos\mu = \frac{y_,}{r_,}$, $\cos\nu = \frac{z_,}{r_,}$ und $T\cos\vartheta = \pm\frac{1}{r_,^2}$ gesetzt wird, je nach dem Sinn, in welchem diese normale Spannung wirkt, je nachdem sie nämlich einen geometrischen Zug oder Druck vorstellt, die Gleichung:

$$A_x x_,^2 + B_y y'^2 + C_z z'^2 + 2Dx_,y_, + 2Ex_,z_, + 2Fy_,z_, = \pm 1 \ , \quad (84.$$

welche die Gleichung einer Fläche des zweiten Grades mit einem Mittelpunkte vorstellt, auf diesen Mittelpunkt als Anfangspunkt aber auf beliebige Achsen bezogen. Läßt man dann diese Achsen wieder mit den Achsen der Fläche zusammenfallen, so hat man für diese wieder und nur die Bedingungen:

$$\mathfrak{D} = 0 \quad , \quad \mathfrak{E} = 0 \quad , \quad \mathfrak{F} = 0$$

also auch

$$\mathfrak{A}_\xi = \mathfrak{A} \quad , \quad \mathfrak{B}_\eta = \mathfrak{B} \quad , \quad \mathfrak{C}_\zeta = \mathfrak{C} \ ;$$

die vorstehende Gleichung kommt dadurch auf die Gleichung (83) zurück und zeigt, daß die entsprechende Fläche verschiedene Gestalten annehmen wird, je nachdem die Zeichen der Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ verschieden sind oder nicht; daß aber in allen Fällen ihre drei Achsen den Quadratwurzeln dieser Hauptspannungen verkehrt proportional sind, und mit den Spannungsachsen zusammenfallen.

Wenn die Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ gleiche Zeichen haben, also jede derselben einen geometrischen Zug, oder jede einen geometrischen Druck vorstellt, so ist diese Fläche ein Ellipsoid, und alle Spannungen haben um den Punkt M herum gleichen Sinn. Sind dagegen die Spannungen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ dem Sinne ihrer Wirkung nach verschieden, indem die eine einen Druck, jede der beiden andern einen Zug vorstellt, oder umgekehrt, so haben sie verschiedene Zeichen und die Gleichung (83) stellt dann die beiden conjugirten Hyperboloide

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{C}\zeta_{,}^2 - \mathfrak{A}\xi_{,}^2 - \mathfrak{B}\eta_{,}^2 = +1 \\ \mathfrak{C}\zeta_{,}^2 - \mathfrak{A}\xi_{,}^2 - \mathfrak{B}\eta_{,}^2 = -1 \end{array}\right.$$

vor, welche den Asymptoten-Kegel:

$$\mathfrak{C}\zeta_{,}^2 - \mathfrak{A}\xi_{,}^2 - \mathfrak{B}\eta_{,}^2 = 0$$

gemeinschaftlich haben, und von denen das zweite einen, das erste zwei Mäntel hat. In diesem Falle muß natürlich der Sinn der Spannungen um den Punkt M herum wechseln; wenn der verlängerte Fahrstrahl des Ellipsoids der Spannungen das Hyperboloid mit einem Mantel schneidet, so hat die Spannung denselben Sinn, wie diejenigen Hauptspannungen, deren Achsen dasselbe schneiden, also nach den obigen Gleichungen, wie $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$; für diejenigen Richtungen dagegen, welche das Hyperboloid mit zwei Mäntel schneiden, ist der Sinn der Spannung mit dem der Hauptspannung $\mathfrak{C}$ übereinstimmend. Den Uebergang von dem einen zum andern der beiden Hyperboloide bildet der Asymptotenkegel, und für diesen sind alle Normalen senkrecht zur Erzeugenden oder senkrecht zum Fahrstrahl; für diese Richtungen wirkt demnach die Spannung längs der betreffenden Schnittebene selbst, oder kommt auf einen bloßen geometrischen Schub zurück.

Zuletzt seien noch, um das allgemeine Gesetz der Spannungen um den Punkt M herum vollständig zu machen, T_1, T_2, T_3 die Spannungen für irgend drei unter sich senkrechte Schnittebenen, $\cos\lambda_1$, $\cos\mu_1$,

$\cos\nu_1$, $\cos\lambda_2$, $\cos\mu_2$, u. s. f. die Winkel, welche die Normalen zu diesen Schnittebenen mit den Spannungs-Achsen bilden; man hat dann nach dem Vorhergehenden die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} T_1^2 &= \mathfrak{A}^2 \cos^2\lambda_1 + \mathfrak{B}^2 \cos^2\mu_1 + \mathfrak{C}^2 \cos^2\nu_1 \\ T_2^2 &= \mathfrak{A}^2 \cos^2\lambda_2 + \mathfrak{B}^2 \cos^2\mu_2 + \mathfrak{C}^2 \cos^2\nu_2 \\ T_3^2 &= \mathfrak{A}^2 \cos^2\lambda_3 + \mathfrak{B}^2 \cos^2\mu_3 + \mathfrak{C}^2 \cos^2\nu_3 \end{aligned}\right\},$$

und die Summe derselben gibt mit der Beachtung der Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} \cos^2\lambda_1 + \cos^2\lambda_2 + \cos^2\lambda_3 &= 1 \\ \cos^2\mu_1 + \cos^2\mu_2 + \cos^2\mu_3 &= 1 \\ \cos^2\nu_1 + \cos^2\nu_2 + \cos^2\nu_3 &= 1 \end{aligned}\right\},$$

welche ausdrücken, daß die Normalen zu den drei Schnittebenen senkrecht unter sich sind, die Beziehung:

$$T_1^2 + T_2^2 + T_3^2 = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 . \qquad (84^a.$$

Man zieht daraus den Schluß, daß die Summe der Quadrate der Spannungen in irgend drei unter sich senkrechten ebenen Schnitten im Punkte M eine unveränderliche Größe und der Summe der Quadrate der drei Hauptspannungen gleich ist*).

In gleicher Weise hat man aber auch durch die Gleichung (83) für die zu ihren Schnittebenen normalen Componenten $T_1 \cos\vartheta_1$, $T_2 \cos\vartheta_2$, $T_3 \cos\vartheta_3$ dieser Spannungen die Werthe:

---

*) Dieser Satz führt nach der obigen geometrischen Betrachtung für das Ellipsoid auf die Eigenschaft, daß wenn r_1, r_2, r_3 drei unter sich senkrechte Fahrstrahlen vom Mittelpunkt aus, a, b, c die drei Halbachsen desselben bezeichnen, man immer hat:

$$\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2} + \frac{1}{r_3^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2},$$

und hätte auch umgekehrt aus dieser Eigenschaft abgeleitet werden können, welche übrigens nicht mit einer andern Beziehung:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = a^2 + b^2 + c^2,$$

worin a′, b′, c′ drei conjugirte Halbmesser bedeuten, zu verwechseln ist und weniger bekannt sein dürfte, als diese.

$$\begin{cases} T_1 \cos\vartheta_1 = \mathfrak{A} \cos^2\lambda_1 + \mathfrak{B} \cos^2\mu_1 + \mathfrak{C} \cos^2\nu_1 \\ T_2 \cos\vartheta_2 = \mathfrak{A} \cos^2\lambda_2 + \mathfrak{B} \cos^2\mu_2 + \mathfrak{C} \cos^2\nu_2 \\ T_3 \cos\vartheta_3 = \mathfrak{A} \cos^2\lambda_3 + \mathfrak{B} \cos^2\mu_3 + \mathfrak{C} \cos^2\nu_3 \end{cases}$$

und leitet daraus wie vorher die Beziehung ab:

84b.) $T_1 \cos\vartheta_1 + T_2 \cos\vartheta_2 + T_3 \cos\vartheta_3 = \mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C}$,

welche ausspricht, daß auch die Summe der normalen Spannungen in drei unter sich rechtwinklichen Schnittebenen constant, und der Summe der drei Hauptspannungen gleich ist, die selbst normal zu ihren Schnittebenen sind.

§. 41.

Wir haben oben schon einen Fall berührt, wo die Spannungen in drei unter sich rechtwinkligen Ebenen gleich sind, und daraus den Schluß gezogen, daß in diesem Falle das Ellipsoid der Spannungen in eine Kugelfläche übergeht und daher alle Spannungen gleich groß sein müssen. Es müssen aber dabei wieder zwei Fälle unterschieden werden, nämlich der, wo die Spannungen auch in gleichem Sinne wirken, und der, wo es nicht der Fall ist. Im ersten Falle wird auch die Fläche (83) eine Kugelfläche und es können dann irgend drei unter sich senkrechte Geraden als Spannungsachsen genommen werden, da nun alle Spannungen auch normal zu ihren betreffenden Schnittebenen wirken. Im andern Falle dagegen wird die Fläche (83) zwar noch eine Umdrehungs-Fläche, aber ein gleichachsiges Doppel-Hyperboloid mit einem rechtwinkligen Asymptotenkegel; es gibt also hier noch eine besondere Hauptspannung und eine Spannungsachse, obgleich das Ellipsoid der Spannungen noch eine Kugelfläche ist und keine besondern Achsen mehr hat, und diese besondere Spannungsachse ist die Achse des Hyperboloids mit zwei Mänteln. Dieser Fall ist durch die Bedingungen (e) vorgesehen; denn führt man diese unter der Form:

$$D^2 = (A_x + C_z)(B_y + C_z) \quad , \quad E^2 = (A_x + B_y)(B_y + C_z)$$

$$F^2 = (A_x + B_y)(A_x + C_z) \; ,$$

in die Gleichung (82b) ein, und beachtet, daß man damit

$$A^2 = A_x^2 + D^2 + E^2 = (A_x + B_y + C_z)^2$$

erhält, so wird diese die Form:

$$\widehat{T}^3 - A\widehat{T}^2 - A^2\widehat{T} + A^3 = 0$$

oder

$$(\widehat{T} - A)(\widehat{T} - A)(\widehat{T} + A) = 0$$

annehmen, sie hat also drei gleiche Wurzeln, aber von verschiedenen Zeichen.

Führt man dann diese Werthe in die Gleichungen (f) ein, um die Winkel λ, μ, ν der Richtung der Achsen zu bestimmen, so erhalten diese nur bestimmte Werthe für $\widehat{T} = -A$, und man findet unter Berücksichtigung der ursprünglichen Bedingungen (82ª), nachdem darin die entsprechenden Vertauschungen in Bezug auf $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{B}_\eta$, $\mathfrak{D}$, u. s. f. vorgenommen worden, den Ausdruck:

$$\cos^2\lambda = \frac{D^2E^2}{D^2E^2 + D^2F^2 + E^2F^2},$$

welcher mit den vorhergehenden Werthen von D^2, E^2 und F^2 die einfache Form

$$\cos^2\lambda = \frac{A_y + C_z}{2(A_x + B_y + C_z)} = \frac{A - A_x}{2A}$$

annimmt, und woraus sich die Werthe von $\cos^2\mu$, $\cos^2\nu$ nach den Regeln der Symmetrie leicht ableiten lassen.

Wenn nun zwei der drei Hauptspannungen gleich werden, so wird das Ellipsoid (81) eine Umdrehungs-Ellipsoid; es werden daher die Spannungen für alle Schnitte, deren Normalen mit der dritten einzelnen Achse (der Umdrehungsachse) gleiche Winkel bilden, einander gleich; ebenso werden die Flächen (83) Umdrehungsflächen und zeigen, daß in allen jenen Schnitten die Spannungen auch auf gleiche Weise gerichtet sind, daß sie also in allen Schnitten, welche parallel zur dritten Achse sind, normal zu ihren Schnittebenen wirken, folglich auch alle Hauptspannungen sind, vorausgesetzt jedoch, daß die beiden gleichen Hauptspannungen auch in gleichem Sinne wirken.

Wenn diese beiden Spannungen dem Sinne nach entgegengesetzt sind, so unterscheidet sich das Gesetz (83) nicht wesentlich von dem allgemeinen Falle, wo die Hauptspannungen alle drei ungleich sind und eine den beiden andern dem Sinne nach entgegengesetzt ist. Es gibt dann nur drei Spannungen, welche normal zu ihren Schnittebenen wirken, also nur drei Hauptspannungen, und diese besondern Fälle werden es einleuchtend machen, daß es für die Bestimmung der Haupt=

spannungen nicht genügt, das Ellipsoid der Spannungen allein zu betrachten.

Endlich haben wir noch die Fälle zu untersuchen, wo eine oder zwei der Hauptspannungen Null sind. Im ersten Falle sei $\mathfrak{C} = 0$, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von gleichem Sinne; es gehen dann die Gleichungen (81) und (83) in

$$\mathfrak{A}^2 \xi^2 + \mathfrak{B}^2 \eta^2 = 1 \; ,$$

$$\mathfrak{A} \xi_,^2 + \mathfrak{B} \eta_,^2 = 1 \; ,$$

über und stellen nun elliptische Cylinder vor, deren Erzeugende zur Ebene der $\xi\eta$ senkrecht ist, und die zweite Fläche zeigt, daß nun alle Spannungen zu der Ebene der beiden Spannungsachsen parallel gerichtet sind, und daß wieder insbesondere die Spannungen für alle Schnitte, welche die ebengenannte Ebene nach derselben Geraden schneiden, unter sich parallele Richtungen haben. Diese Folgerungen bestehen auch für den Fall, in dem $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in entgegengesetztem Sinne wirken, und die Fläche (83) unter der Form:

$$\mathfrak{A} \xi^2 - \mathfrak{B} \eta^2 = \pm 1$$

in zwei conjugirte hyperbolische Cylinderflächen mit zwei Asymptoten-Ebenen übergeht. Im letztern Falle gibt es aber wieder viele Richtungen, in denen die Spannung parallel zu der betreffenden Schnittebene gerichtet, also nur ein geometrischer Schub ist, und zwar findet dieß für alle Schnitte statt, welche senkrecht zu den beiden vorgenannten Asymptoten-Ebenen durch den Punkt M gelegt werden.

Wenn zwei der Hauptspannungen, z. B. $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$, Null sind, so kommt jede der Gleichungen (81) und (83) auf die zweier Ebenen zurück, welche zu der entsprechenden Spannungsachse senkrecht und vom Anfangspunkt um die Größen

$$\xi = \pm \frac{1}{\mathfrak{A}} \quad , \qquad \xi_, = \pm \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{A}}}$$

entfernt sind. Aus der ersten schließt man, daß nun die Spannungen wie die Cosinus der Neigungswinkel der Schnitt-Normalen gegen die Spannungsachse abnehmen, oder daß man hat

$$T = \mathfrak{A} \cos \lambda \; ,$$

und aus der zweiten folgt, daß alle Spannungen zu der Hauptspannung A parallel sind, was übrigens auch leicht aus den andern bisher abgeleiteten Beziehungen, namentlich aus den Gleichungen (80[b]) hervorgeht.

§. 42.

Nachdem wir durch die vorhergehende Betrachtung das Gesetz, nach welchem sich die Spannungen um den Punkt M herum regeln, kennen gelernt haben, kehren wir zu unsern Gleichungen der innern Bewegung dieses Punktes zurück. Dieser Gleichungen sind nur drei, und diese drei Gleichungen enthalten zehn Unbekannte, nämlich die drei normalen Spannungen T_x, T_y, T_z, die drei zur Schnittebene parallelen, tangentialen oder verschiebenden Spannungen S_z, S_y und S_x, die drei Geschwindigkeitscomponenten $u_{x'}$, $u_{y'}$, $u_{z'}$ und die Dichte q. Zwischen den vier letztern Veränderlichen haben wir aber noch die durch die Gleichung (71) ausgedrückte Beziehung; es müssen demnach noch sechs neue Gleichungen gebildet werden, um die Aufgabe lösen zu können. Diese neuen Gleichungen hängen aber von der Natur des Systems ab, da sie die Beziehungen ausdrücken müssen, welche zwischen den sechs Spannungen T_x, T_y, S_x u. s. f. und den während einer beliebigen Zeit eingetretenen Aenderungen der Lage des Punktes M oder $x'y'z'$ in Bezug auf die übrigen Punkte des Systems bestehen, und welche nothwendig von den innern, zwischen diesen Punkten wirkenden Kräften abhängen, die sich jener Aenderung in der gegenseitigen Lage derselben widersetzen. Denn es leuchtet einerseits ein, daß zwischen zwei Punkten, welche gleiche und parallel gerichtete innere Geschwindigkeiten besitzen und daher immer dieselbe gegenseitige Lage und Entfernung behalten, keine Spannung stattfinden kann, daß aber eine solche Spannung entstehen wird, sobald eine Aenderung in ihrer gegenseitigen Entfernung oder Lage eintreten will, sobald die innere Geschwindigkeit des einen eine andere werden will, als die des andern, sei es der Größe oder Richtung nach. Dazu gehört aber auf der andern Seite, daß zwischen jenen Punkten innere Kräfte thätig sind, welche dieser eintretenden Aenderung in der gegenseitigen Lage Widerstand leisten; wenn in einer oder in der andern Richtung und in einem bestimmten Sinne genommen ein solcher innerer Widerstand fehlt, wie dieß z. B. bei den flüssigen Systemen vorausgesetzt wird, so kann in dieser Richtung und in diesem Sinne auch von keiner Spannung die Rede sein. Wir können deshalb jene Beziehungen zwischen den Spannungen und den von der Zeit unabhängigen Aenderungsgesetzen der Lage eines Punktes nur für Systeme von bestimmter Natur, unter bestimmten Voraussetzungen über

die Beschaffenheit des innern Widerstandes aufstellen, was im dritten Kapitel dieses Abschnittes für die stetigen veränderlichen Systeme der festen Aggregatform, also mit vorherrschender Cohäsion, und im folgenden Buche für die flüssigen Systeme geschehen wird.

Die genannten Aenderungsgesetze der Lage eines Punktes gegen die ihn umgebenden, also nach verschiedenen Richtungen hin betrachtet, werden aber durch ein ganz ähnliches allgemeines Gesetz geregelt, wie die Spannungen um diesen Punkt herum, und diese allen stetigen Systemen zukommende Eigenschaft haben wir hier noch zu erörtern.

Dazu wollen wir die Coordinaten eines beliebigen Punktes M im System am Ende der Zeit t und auf das parallel fortschreitende Coordinatensystem bezogen, dessen Anfangspunkt wieder der Mittelpunkt der ganzen Masse des Systems sei, einfach mit x, y, z bezeichnen, und mit

$$x^{(0)} = x - \mathfrak{x} \quad , \qquad y^{(0)} = y - \mathfrak{y} \quad , \qquad z^{(0)} = z - \mathfrak{z}$$

die Coordinaten desselben materiellen Punktes M am Ende der Zeit t_0, so daß $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen Aenderungen seiner ursprünglichen Coordinaten $x^{(0)}$, $y^{(0)}$, $z^{(0)}$ vorstellen, und daher als Functionen der vier unabhängigen Veränderlichen x, y, z und t betrachtet werden müssen. Für einen andern Punkt M', dessen Coordinaten am Ende der Zeit t durch $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ bezeichnet werden können, wird man am Ende der Zeit t_0 die Coordinaten

$$x - \mathfrak{x} + \Delta(x - \mathfrak{x}) \quad , \quad y - \mathfrak{y} + \Delta(y - \mathfrak{y}) \quad , \quad z - \mathfrak{z} + \Delta(z - \mathfrak{z})$$

gehabt haben, während also am Ende der Zeit t die Projectionen der gegenseitigen Entfernung

$$\Delta s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

der beiden Punkte M und M' auf den Coordinaten-Achsen durch Δx, Δy, Δz gemessen werden, waren dieselben am Ende der Zeit t_0 nur

$$\Delta x - \Delta \mathfrak{x} \quad , \quad \Delta y - \Delta \mathfrak{y} \quad , \quad \Delta z - \Delta \mathfrak{z} \; ;$$

es werden demnach die Unterschiede $\Delta \mathfrak{x}$, $\Delta \mathfrak{y}$, $\Delta \mathfrak{z}$ dieser Projectionen die während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen Aenderungen jener Entfernung parallel zu den Coordinaten-Achsen genommen vorstellen, und die Anfangswerthe der Verhältnisse $\frac{\Delta \mathfrak{x}}{\Delta s}$, $\frac{\Delta \mathfrak{y}}{\Delta s}$, $\frac{\Delta \mathfrak{z}}{\Delta s}$ dieser Aenderungen

zu der am Ende der Zeit t stattfindenden Entfernung Δs, oder die Uebergangsgesetze:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s}, \quad \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s}, \quad \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial s},$$

worin wieder s als eine Veränderliche zu betrachten ist, von welcher x, y, z willkürliche Functionen sind, können demnach als die Projectionen der während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen geometrischen Verlängerung oder Verkürzung, der positiven oder negativen **geometrischen Dehnung** des Systems in dem Punkte xyz bezeichnet werden, und zwar für diejenige Uebergangs-Richtung, welche durch die Functionen $\frac{\partial x}{\partial s} = \cos\alpha$, $\frac{\partial y}{\partial s} = \cos\beta$, $\frac{\partial z}{\partial s} = \cos\gamma$ bestimmt wird. Diese Uebergangs-Richtung darf aber nicht mit der Richtung der geometrischen Dehnung selbst verwechselt werden; denn diese wird durch die gegenseitigen Verhältnisse der Aenderungen $\Delta \mathfrak{x}$, $\Delta \mathfrak{y}$, $\Delta \mathfrak{z}$ bedingt, welche selbst wieder von jener Uebergangs-Richtung abhängen, sich mit dieser ändern.

Bezeichnen wir demnach diese positive oder negative geometrische Dehnung in dem Punkte xyz und für eine beliebige Uebergangs-Richtung mit $\mathfrak{d}$, ihre Projectionen oder Componenten nach den Coordinaten-Achsen mit $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$, die Winkel ihrer Richtung mit diesen Achsen durch $\widehat{\mathfrak{d}x}$, $\widehat{\mathfrak{d}y}$, $\widehat{\mathfrak{d}z}$, so haben wir zuerst die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{d}_x = \mathfrak{d}\cos\widehat{\mathfrak{d}x} = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s} \\
&= \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}\cos\gamma \\
\mathfrak{d}_y = \mathfrak{d}\cos\widehat{\mathfrak{d}y} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}\cos\gamma \\
\mathfrak{d}_z = \mathfrak{d}\cos\widehat{\mathfrak{d}z} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial s} &= \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}\cos\gamma
\end{aligned}\right\}, \quad (a.$$

und wenn dann ϑ der Winkel ist zwischen der Richtung der Dehnung $\mathfrak{d}$ und der Uebergangsrichtung, so wird auch

$$\mathfrak{d}\cos\vartheta = \mathfrak{d}_x\cos\alpha + \mathfrak{d}_y\cos\beta + \mathfrak{d}_z\cos\gamma\,, \qquad (b.$$

und mit den Werthen (a) nimmt diese Gleichung die doppelte Form an

$$\text{c.)}\left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}\cos\vartheta = &\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\alpha\,, \\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\beta\,, \\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma\,, \end{aligned}\right.$$

oder

$$\text{c'.)}\left\{\begin{aligned} \mathfrak{d}\cos\vartheta = &\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\cos\gamma\right)\cos\alpha\,, \\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\cos\gamma\right)\cos\beta\,, \\ &+\left(\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}\cos\alpha + \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}\cos\beta + \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}\cos\gamma\right)\cos\gamma\,, \end{aligned}\right.$$

welche zeigt, daß sowohl $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}$ als $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}$ die rechtwinkligen Componenten der geometrischen Dehnung $\mathfrak{a}$ für den zur Achse der x parallelen Uebergang vorstellen, daß man also

$$\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x} = \mathfrak{a}_x \quad , \quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x} = \mathfrak{a}_y \quad , \quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x} = \mathfrak{a}_z$$

setzen kann; ebenso können $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}$ oder $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}$ als die Componenten $\mathfrak{b}_x$, $\mathfrak{b}_y$, $\mathfrak{b}_z$ der Dehnung $\mathfrak{b}$ für den zur Achse der y parallelen Uebergang, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}$, $\frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}$ oder $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}$ und $\frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial z}$ als die Componenten $\mathfrak{c}_x$, $\mathfrak{c}_y$, $\mathfrak{c}_z$ der Dehnung $\mathfrak{c}$ für den zur Achse der z parallelen Uebergang genommen werden, und es folgen daraus die Beziehungen:

$$85.)\quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y} = \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial x}\;,\quad \frac{\partial\mathfrak{y}}{\partial z} = \frac{\partial\mathfrak{z}}{\partial y}\;,$$

welche den Gleichungen (76) für die Spannungen entsprechen und eine merkwürdige Uebereinstimmung zwischen den Spannungs- und Dehnungsverhältnissen um den Punkt M herum beurkunden.

Diese Uebereinstimmung wird indessen noch augenfälliger, wenn wir die Werthe (a) unter der Form:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{d}_x &= \mathfrak{a}_x \cos\alpha + \mathfrak{b}_x \cos\beta + \mathfrak{c}_x \cos\gamma \\ \mathfrak{d}_y &= \mathfrak{a}_y \cos\alpha + \mathfrak{b}_y \cos\beta + \mathfrak{c}_y \cos\gamma \\ \mathfrak{d}_z &= \mathfrak{a}_z \cos\alpha + \mathfrak{b}_z \cos\beta + \mathfrak{c}_z \cos\gamma\end{aligned}\right\} \quad (d.$$

in die Gleichung:

$$\mathfrak{d}^2 = \mathfrak{d}_x^2 + \mathfrak{d}_y^2 + \mathfrak{d}_z^2$$

einführen, und in der dadurch zum Vorschein kommenden Gleichung

$$\mathfrak{d} = \frac{1}{r} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{x'}{r} \quad , \quad \cos\beta = \frac{y'}{r} \quad , \quad \cos\gamma = \frac{z'}{r}$$

setzen, wodurch sie mit der Beachtung der Beziehungen:

$$\mathfrak{a}_x^2 + \mathfrak{a}_y^2 + \mathfrak{a}_z^2 = \mathfrak{a}^2 \quad , \quad \mathfrak{b}_x^2 + \mathfrak{b}_y^2 + \mathfrak{b}_z^2 = \mathfrak{b}^2 \, ,$$

$$\mathfrak{a}_x \mathfrak{b}_x + \mathfrak{a}_y \mathfrak{b}_y + \mathfrak{a}_z \mathfrak{b}_z = \mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}} \, ,$$

u. s. f.

die Form:

$$\left.\begin{aligned}1 = \mathfrak{a}^2 x'^2 + \mathfrak{b}^2 y'^2 + \mathfrak{c}^2 z'^2 + 2\mathfrak{a}\mathfrak{b} \cos\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{b}}.x'y' \\ + 2\mathfrak{a}\mathfrak{c} \cos\widehat{\mathfrak{a}\mathfrak{c}}.x'z' + 2\mathfrak{b}\mathfrak{c} \cos\widehat{\mathfrak{b}\mathfrak{c}}.y'z'\end{aligned}\right\} \quad (86.$$

annimmt und so wieder die Gleichung eines Ellipsoides vorstellt, auf den Mittelpunkt aber auf beliebige Achsen bezogen, dessen Fahrstrahl der geometrischen Dehnung, welche in der durch den Fahrstrahl angedeuteten Uebergangsrichtung stattfindet, verkehrt proportional ist, und dessen Achsen die Richtungen angeben, nach welchen die Dehnung eine größte und eine kleinste ist unter allen, die um den Punkt M herum statthaben.

Die auf die Uebergangsrichtung oder auf den Fahrstrahl projicirte Dehnung $\mathfrak{d} \cos\vartheta$ dagegen wird durch eine Fläche von der Form:

$$\mathfrak{a} x_,^2 + \mathfrak{b} y_,^2 + \mathfrak{c} z_,^2 + 2\mathfrak{f} x_, y_, + 2\mathfrak{g} x_, z_, + 2\mathfrak{h} y_, z_, = \pm 1 \quad (87.$$

anschaulich gemacht, welche aus dem Ausdruck (b) hervorgeht, wenn man in denselben die Werthe (d) einführt, der Symmetrie wegen die

in den Gleichungen (85) gleichgesetzten Coefficienten oder ihre halben Summen: $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y}+\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x}\right)$, $\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z}+\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y}\right)$ durch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{h}$ bezeichnet und dann

$$\mathfrak{d}\cos\vartheta = \pm\frac{1}{r_{,}^{2}}\ ,\quad \cos\alpha = \frac{x_{,}}{r_{,}}\ ,\quad \cos\beta = \frac{y_{,}}{r_{,}}\ ,\quad \cos\gamma = \frac{z_{,}}{r_{,}}$$

setzt. Die Normale in dem Punkte x, y, z, dieser Fläche bildet mit den Coordinatenachsen die Winkel λ, μ, ν, welche durch die Gleichungen:

$$V_{,}\cos\lambda = \mathfrak{a}_x x_{,} + \mathfrak{f} y_{,} + \mathfrak{g} z_{,}\ ,\quad V_{,}\cos\mu = \mathfrak{f} x_{,} + \mathfrak{b}_y y_{,} + \mathfrak{h} z_{,}\ ,$$
$$V_{,}\cos\nu = \mathfrak{g} x_{,} + \mathfrak{h} y_{,} + \mathfrak{c}_z z_{,}\ ,$$

worin $V_{,}$ den Ausdruck:

$$\left[(\mathfrak{a}_x x_{,} + \mathfrak{f} y_{,} + \mathfrak{g} z_{,})^2 + (\mathfrak{f} x_{,} + \mathfrak{b}_y y_{,} + \mathfrak{h} z_{,})^2 + (\mathfrak{g} x_{,} + \mathfrak{h} y_{,} + \mathfrak{c}_z z_{,})^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

ersetzt, bestimmt werden. Man wird sich aber durch Vergleichung dieser Ausdrücke mit den Werthen von $\mathfrak{d}_x$, $\mathfrak{d}_y$, $\mathfrak{d}_z$ und dem daraus folgenden von $\mathfrak{d} = \sqrt{\mathfrak{d}_x^2 + \mathfrak{d}_y^2 + \mathfrak{d}_z^2}$ und mit Beachtung der Gleichungen (85) leicht überzeugen, daß man hat

$$V_{,}\cos\lambda = r_{,}\mathfrak{d}_x\ ,\quad V_{,}\cos\mu = r_{,}\mathfrak{d}_y\ ,\quad V_{,}\cos\nu = r_{,}\mathfrak{d}_z\ ,\quad V_{,} = r_{,}\mathfrak{d}\ ,$$

also auch

$$\cos\lambda = \frac{\mathfrak{d}_x}{\mathfrak{d}}\ ,\quad \cos\mu = \frac{\mathfrak{d}_y}{\mathfrak{d}}\ ,\quad \cos\nu = \frac{\mathfrak{d}_z}{\mathfrak{d}}\ ;$$

und wird daraus schließen, daß **die Richtung der Dehnung $\mathfrak{d}$ für die durch den Fahrstrahl angedeutete Uebergangsrichtung mit der Normalen im Endpunkt des Fahrstrahls zusammenfällt.**

Längs der drei Achsen der Fläche (87) fällt die Richtung des Fahrstrahles mit der der Normalen zusammen, folglich auch die Richtung der Dehnung mit der Richtung des Ueberganges, und wenn die Gleichung der Fläche auf diese Achsen bezogen wird, so nimmt sie die einfache Form:

$$\widehat{\mathfrak{a}}\xi^2 + \widehat{\mathfrak{b}}\eta^2 + \widehat{\mathfrak{c}}\zeta^2 = \pm 1$$

an und zeigt, daß die Dehnungen um den Punkt M herum wieder von drei Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$, $\widehat{\mathfrak{b}}$, $\widehat{\mathfrak{c}}$ abhängen, deren entsprechende Uebergangsrichtungen und eigene Richtungen durch die Achsen dieser Fläche, welche auch mit denen des Ellipsoids (86) zusammentreffen, und die man demnach die Dehnungsachsen nennen kann, bestimmt werden.

Die Lage dieser Dehnungsachsen wird aus den als bekannt vorausgesetzten Dehnungsverhältnissen nach drei beliebigen Achsen mittels der vorhergehenden Eigenschaft in ähnlicher Weise bestimmt, wie die Lage der Spannungsachsen. Wenn $\widehat{\mathfrak{d}}$ eine der drei Hauptdehnungen bezeichnet, und λ, μ, ν die Winkel sind, welche ihre Richtung und die entsprechende Uebergangsrichtung mit den drei Achsen der x, y, z, bildet, so hat man gemäß der Werthe (d):

$$\left.\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{d}}_x &= \widehat{\mathfrak{d}}\cos\lambda = \mathfrak{a}_x\cos\lambda + \mathfrak{b}_x\cos\mu + \mathfrak{c}_x\cos\nu\\
\widehat{\mathfrak{d}}_y &= \widehat{\mathfrak{d}}\cos\mu = \mathfrak{a}_y\cos\lambda + \mathfrak{b}_y\cos\mu + \mathfrak{c}_y\cos\nu\\
\widehat{\mathfrak{d}}_z &= \widehat{\mathfrak{d}}\cos\nu = \mathfrak{a}_z\cos\lambda + \mathfrak{b}_z\cos\mu + \mathfrak{c}_z\cos\nu
\end{aligned}\right\}$$

oder wenn für die $\mathfrak{b}_x$ und $\mathfrak{a}_y$, $\mathfrak{c}_x$ und $\mathfrak{a}_z$, u. s. f. wieder die Bezeichnung $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ eingeführt wird

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{a}_x)\cos\lambda - \mathfrak{f}\cos\mu - \mathfrak{g}\cos\nu &= 0\\
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{b}_y)\cos\mu - \mathfrak{f}\cos\lambda - \mathfrak{h}\cos\nu &= 0\\
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{c}_z)\cos\nu - \mathfrak{g}\cos\lambda - \mathfrak{h}\cos\mu &= 0
\end{aligned}\right\}, \qquad \text{(e.}$$

und die Elimination der Winkelfunctionen aus diesen drei Gleichungen führt zu der Schlußgleichung des dritten Grades:

$$\left.\begin{aligned}
(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{a}_x)(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{b}_y)(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{c}_z) - \mathfrak{h}^2(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{a}_x) - \mathfrak{g}^2(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{b}_y)\\
- \mathfrak{f}^2(\widehat{\mathfrak{d}} - \mathfrak{c}_z) + 2\mathfrak{f}\mathfrak{g}\mathfrak{h} = 0\,,
\end{aligned}\right\} \text{(89.}$$

durch deren Wurzeln die Größe der drei Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$, $\widehat{\mathfrak{b}}$ und $\widehat{\mathfrak{c}}$ gegeben ist. Werden diese dann eine nach der andern in die Gleichungen (e) eingeführt, so können daraus die entsprechenden Winkel λ, μ, ν

für jede derselben oder die Richtungen der drei Dehnungsachsen gefunden werden *).

*) Ein gleiches Verfahren kann in allen ähnlichen Fällen dazu dienen, die Lage und Größe der Halbachsen eines Ellipsoids oder Hyperboloids aus der allgemeinen Mittelpunktsgleichung abzuleiten, also insbesondere auch dazu die Lage der Hauptachsen und die entsprechenden Massemomente eines festen Systems zu bestimmen. Man hat dazu aus der Gleichung (129) des Ellipsoids der Massemomente in §. 163 des zweiten Buches für die Richtungswinkel λ, μ, ν der Normalen im Allgemeinen die Beziehungen:

$$\mathfrak{V} \cos\lambda = \mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta \;, \quad \mathfrak{V} \cos\mu = \mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta \;,$$
$$\mathfrak{V} \cos\nu = \mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta \;,$$

worin $\mathfrak{V}$ den Ausdruck:

$$[(\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta)^2 + (\mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta)^2 + (\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta)^2]^{\frac{1}{2}}$$

ersetzt. Für die Winkel eines Fahrstrahles $\mathfrak{r}$ mit den drei Coordinatenachsen der ξ, η, ζ hat man die Cosinus $\frac{\xi}{\mathfrak{r}}$, $\frac{\eta}{\mathfrak{r}}$, $\frac{\zeta}{\mathfrak{r}}$, und daher für die Lage der Halbachsen des Ellipsoids, welche zugleich Fahrstrahlen und Normalen sind, die Bedingungen:

$$\alpha.) \quad \frac{\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta}{\mathfrak{V}} = \frac{\xi}{\mathfrak{r}} \,, \quad \frac{\mathfrak{B}\eta = \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta}{\mathfrak{V}} = \frac{\eta}{\mathfrak{r}} \,, \quad \frac{\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta}{\mathfrak{V}} = \frac{\zeta}{\mathfrak{r}}$$

oder in anderer Form:

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta}{\xi} = \frac{\mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta}{\eta} = \frac{\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta}{\zeta} \,.$$

Die Gleichung des Ellipsoids nimmt aber auch die Form an:

$$1 = (\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta)\,\xi + (\mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta)\,\eta + (\mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta)\,\zeta$$

und gibt mit den vorhergehenden Bedingungen die Werthe:

$$\mathfrak{A}\xi - \mathfrak{F}\eta - \mathfrak{G}\zeta = \frac{\xi}{\mathfrak{r}^2} \,, \quad \mathfrak{B}\eta - \mathfrak{F}\xi - \mathfrak{H}\zeta = \frac{\eta}{\mathfrak{r}^2} \,, \quad \mathfrak{C}\zeta - \mathfrak{G}\xi - \mathfrak{H}\eta = \frac{\zeta}{\mathfrak{r}^2} \,,$$
$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{r}} = \frac{1}{\mathfrak{r}^2} = \mathfrak{M} \,.$$

Man erhält damit aus den drei Gleichungen (α) die folgenden:

$$\beta.) \quad \begin{cases} (\mathfrak{M} - \mathfrak{A}) \cos\lambda + \mathfrak{F} \cos\mu + \mathfrak{G} \cos\nu = 0 \,, \\ (\mathfrak{M} - \mathfrak{B}) \cos\mu + \mathfrak{F} \cos\lambda + \mathfrak{H} \cos\nu = 0 \,, \\ (\mathfrak{M} - \mathfrak{C}) \cos\nu + \mathfrak{G} \cos\lambda + \mathfrak{H} \cos\mu = 0 \,, \end{cases}$$

§. 43.

Wenn die drei Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$, $\widehat{\mathfrak{b}}$, $\widehat{\mathfrak{c}}$ gleichen Sinn haben, also alle drei zugleich eigentliche Ausdehnungen oder alle zugleich Staunungen vorstellen, dann wird die Fläche (88) ein Ellipsoid, welches keine weitern besondern Eigenschaften für die Dehnungen um den Punkt M herum kenntlich macht. Haben dagegen jene Hauptdehnungen verschiedenen Sinn, so daß zwei derselben, z. B. $\widehat{\mathfrak{a}}$ und $\widehat{\mathfrak{b}}$ Staunungen bedeuten, die dritte $\widehat{\mathfrak{c}}$ eine Ausdehnung, oder umgekehrt, so stellt die Gleichung (88) zwei conjugirte Hyperboloide mit einem gemeinschaftlichen Asymptotenkegel vor; das Hyperboloid mit zwei Mänteln umfaßt dann alle Uebergangsrichtungen, nach welchen die geometrische Dehnung denselben Sinn hat, wie die nach der reellen Achse dieser Fläche gerichtete dritte Hauptdehnung $\widehat{\mathfrak{c}}$; das Hyperboloid mit einem Mantel umfaßt alle Richtungen, nach welchen die Dehnung gleichen Sinn hat, wie die seinen beiden reellen Achsen entsprechenden Hauptdehnungen $\widehat{\mathfrak{a}}$ und $\widehat{\mathfrak{b}}$, und der Asymptotenkegel vereinigt diejenigen Richtungen, nach welchen die Richtung der Dehnung senkrecht ist zur Uebergangs-Richtung, nach denen also die Dehnungen in bloßen Verschiebungen bestehen, und daher weder eigentliche Dehnungen noch Staunungen sind.

Nach dem Vorhergehenden wird man nun für die Fälle, wo eine oder zwei der Hauptdehnungen Null sind, oder zwei derselben gleich werden, aus der Gleichung (88) für die Dehnungen um den Punkt M herum leicht ähnliche Folgerungen ziehen, wie die, welche wir im vorhergehenden §. für die Spannungen erhalten haben. Ebenso wird man noch aus dem Ellipsoid der Dehnungen, dessen Gleichung (86) in Bezug auf die Dehnungsachsen die Form:

$$\widehat{\mathfrak{a}}^2 \xi_{\prime}^2 + \widehat{\mathfrak{b}}^2 \eta_{\prime}^2 + \widehat{\mathfrak{c}}^2 \zeta_{\prime}^2 = 1 \qquad (90.$$

annimmt, den Schluß ziehen, daß wenn $\mathfrak{d}_1$, $\mathfrak{d}_2$, $\mathfrak{d}_3$ die Dehnungen für irgend drei unter sich rechtwinklige Uebergangs-Richtungen sind,

---

aus welchen durch Elimination von λ, μ, ν wieder die Gleichung:

$$(\mathfrak{M}-\mathfrak{A})(\mathfrak{M}-\mathfrak{B})(\mathfrak{M}-\mathfrak{C}) - \mathfrak{F}^2(\mathfrak{M}-\mathfrak{C}) - \mathfrak{G}^2(\mathfrak{M}-\mathfrak{B}) - \mathfrak{H}^2(\mathfrak{M}-\mathfrak{A}) + 2\mathfrak{F}\mathfrak{G}\mathfrak{H} = 0$$

hervorgeht, deren Wurzeln die Massemomente in Bezug auf die drei Hauptachsen geben, und einzeln in die vorhergehenden Gleichungen (β) eingeführt, zur Bestimmung der Richtungen dieser Hauptachsen dienen werden.

91ᵃ.) $$\mathfrak{d}_1^2 + \mathfrak{d}_2^2 + \mathfrak{d}_3^2 = \widehat{\mathfrak{a}}^2 + \widehat{\mathfrak{b}}^2 + \widehat{\mathfrak{c}}^2 \, ,$$

daß also die Summe der Quadrate dieser drei Dehnungen immer der Summe der Quadrate der drei Hauptdehnungen gleich ist, und die Gleichung (88) führt wie dort zu der Beziehung:

91ᵇ.) $$\mathfrak{d}_1 \cos\vartheta_1 + \mathfrak{d}_2 \cos\vartheta_2 + \mathfrak{d}_3 \cos\vartheta_3 = \widehat{\mathfrak{a}} + \widehat{\mathfrak{b}} + \widehat{\mathfrak{c}} \, ,$$

welche ausspricht, daß diese auf ihre Uebergangsrichtung projicirten Dehnungen ebenfalls eine unveränderliche Summe bilden, welche der Summe der drei Hauptdehnungen gleich ist.

Solche drei rechtwinklige Uebergangsrichtungen sind aber unsere ursprünglichen beliebigen Achsen der x', y', z' oder $x_,$, $y_,$, $z_,$ in den Gleichungen (86) und (87), und man wird nach dem Vorhergehenden leicht einsehen, daß

$$\mathfrak{a}_x = \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \quad , \quad \mathfrak{b}_y = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} \quad , \quad \mathfrak{c}_z = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$$

die zu jenen Achsen parallelen Projectionen oder Componenten der geometrischen Dehnungen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ für die durch dieselben Achsen angedeuteten Uebergangs-Richtungen sind, daß also für jede Lage dieser Achsen die Summe

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} = \widehat{\mathfrak{a}} + \widehat{\mathfrak{b}} + \widehat{\mathfrak{c}}$$

eine unveränderliche Größe ist.

Diese Summe ist aber auch für Systeme, bei welchen die geometrischen Dehnungen immer sehr klein bleiben, wie dieß für die veränderlichen Systeme der festen Aggregatform meistens der Fall ist, sehr nahe gleich der während der Zeit $t - t_0$ eingetretenen geometrischen Raumausdehnung, welche wir in §. 35 mit ϱ bezeichnet haben. Denn wenn V wie dort den Rauminhalt eines am Ende der Zeit t von drei unter sich senkrechten Ebenen im Punkte $x y z$ begrenzten Theiles von dem betreffenden System bezeichnet, so daß man hat

$$V = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \, . \, 1 \, ,$$

und V_0 den Rauminhalt desselben Theiles am Ende der Zeit t_0 vorstellt, so daß

$$V_0 = \int_{x_0}^{x-\mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y-\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1 \,,$$

so wird die während der Zeit $t - t_0$ eingetretene Volumenänderung desselben Theiles durch

$$V - V_0 = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 - \int_{x_0}^{x-\mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y-\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1$$

ausgedrückt, und man findet dafür durch eine ähnliche Entwickelung, wie in dem genannten Orte, indem man beachtet, daß

$$\int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1 = \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 - \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1 \,,$$

$$\int_{y_0}^{y-\mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z-\mathfrak{z}} \partial z \,.\, 1 = \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 - \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1$$
$$- \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, 1 + \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1 \,,$$

u. s. f.

den Ausdruck:

$$V - V_0 = \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{x_0}^{y} \partial y \,.\, \mathfrak{z} + \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, \mathfrak{y} + \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z_0}^{z} \partial z \,.\, \mathfrak{x}$$
$$- \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \,.\, \mathfrak{z} - \int_{z_0}^{z} \partial z \int_{x-\mathfrak{x}}^{x} \partial x \,.\, \mathfrak{y} - \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, \mathfrak{x}$$
$$+ \int_{x-\mathfrak{x}}^{x} \partial x \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z \,.\, 1 \,.$$

Daraus folgt dann als Anfangswerth des Verhältnisses $\frac{\Delta^3.(V-V_0)}{\Delta x \Delta y \Delta z}$ oder als geometrische Raumausdehnung ϱ in dem Punkte $x\,y\,z$ der obengenannte Werth:

$$92.)\qquad \varrho = \frac{\partial^3.(V-V_0)}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x},$$

wenn die Aenderungen $\Delta \mathfrak{x}$, $\Delta \mathfrak{y}$, $\Delta \mathfrak{z}$ der Coordinatenänderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ für den Uebergang von einem Punkte $x\,y\,z$ zu einem folgenden $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ im Verhältniß zu den Aenderungen Δx, Δy, Δz, oder anders ausgedrückt, wenn die geometrischen Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$ immer klein genug bleiben, um die Glieder

$$\frac{\partial^3 . \int_{x_0}^{x} \partial x \int_{y-\mathfrak{y}}^{y} \partial y . \mathfrak{z}}{\partial x \partial y \partial z}, \qquad \frac{\partial^3 . \int_{z_0}^{z} \partial z \int_{x-\mathfrak{x}}^{x} \partial x . \mathfrak{y}}{\partial z \partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^3 . \int_{y_0}^{y} \partial y \int_{z-\mathfrak{z}}^{z} \partial z . \mathfrak{x}}{\partial y \partial z \partial x},$$

welche mit den Producten $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$ und $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial \mathfrak{z}}$ homogen sind, und um so mehr das letzte Glied des Werthes von ϱ gegen die drei ersten Glieder vernachlässigen zu können, was wie schon bemerkt für die veränderlichen Systeme der festen Aggregatform immer zulässig ist.

Beachtet man dann, daß aus den Gleichungen:

$$x = x^{(0)} + \mathfrak{x}, \qquad y = y^{(0)} + \mathfrak{y}, \qquad z = z^{(0)} + \mathfrak{z}$$

die Aenderungsgesetze:

$$93.)\quad \frac{dx}{dt} = u_x = \frac{d.\mathfrak{x}}{dt}, \qquad \frac{dy}{dt} = u_y = \frac{d.\mathfrak{y}}{dt}, \qquad \frac{dz}{dt} = u_z = \frac{d.\mathfrak{z}}{dt}$$

hervorgehen, und daß man auch hat

$$\frac{d.\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}}{dt} = \frac{\partial \frac{d.\mathfrak{x}}{dt}}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial x}, \qquad \text{u. s. f.},$$

so wird man aus dem vorhergehenden Werthe von ϱ leicht das frühere Aenderungsgesetz (70) desselben in Bezug auf die Zeit, nämlich

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

herleiten; dieser Ausdruck ist aber wie man sich aus der in §. 35 ausgeführten Ableitung oder nach der jetzigen Betrachtungsweise aus der Entwickelung der Beziehungen:

$$\varDelta_t V = \int_{x_0}^{x^{(0)} + \mathfrak{x} + \varDelta t . \mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y^{(0)} + \mathfrak{y} + \varDelta t . \mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z^{(0)} + \mathfrak{z} + \varDelta t . \mathfrak{z}} \partial z \; . \; 1$$

$$- \int_{x_0}^{x^{(0)} + \mathfrak{x}} \partial x \int_{y_0}^{y^{(0)} + \mathfrak{y}} \partial y \int_{z_0}^{z^{(0)} + \mathfrak{z}} \partial z \; . \; 1$$

und

$$\frac{d\varrho}{dt} = \frac{d . \frac{\partial^3 (V - V_0)}{\partial x \partial y \partial z}}{dt} = \frac{\partial^3 . \frac{dV}{dt}}{\partial x \partial y \partial z}$$

überzeugen wird, immer streng richtig, wenn auch die Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z}$ nicht sehr klein sind.

§. 44.

Mittels der vorhergehenden Beziehungen (93) sind wir nun auch in den Stand gesetzt, die Geschwindigkeiten $u_{x'}$, $u_{y'}$, $u_{z'}$ in den allgemeinen Gleichungen (74) und (78) der Bewegung des Punktes M in Bezug auf ein parallel fortschreitendes oder in Bezug auf ein festes Coordinatensystem durch die von dem Ende einer bestimmten Zeit t_0 an eintretenden Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ seiner Lage auszudrücken. Dazu muß man aber beachten, daß in diesen Beziehungen die Aenderungsgesetze $\frac{d . \mathfrak{x}}{dt}$, $\frac{d . \mathfrak{y}}{dt}$, $\frac{d . \mathfrak{z}}{dt}$ die vollständigen Aenderungsgesetze von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, in Bezug auf die Aenderung von t sind, daß also diese Beziehungen allgemein und streng betrachtet die entwickelte Form:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx'}{dt} &= u_{x'} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt} + u_{x'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'} + u_{y'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y'} + u_{z'} \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'} \\ \frac{dy'}{dt} &= u_{y'} = \frac{d\mathfrak{y}}{dt} + u_{y'} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x'} + u_{y'} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'} + u_{z'} \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z'} \\ \frac{dz'}{dt} &= u_{z'} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} + u_{x'} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x'} + u_{y'} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y'} + u_{z'} \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z'} \end{aligned}\right\} \quad (94.$$

annehmen, und nur für sehr kleine geometrische Dehnungen auf die einfachen Werthe:

$$u_{x'} = \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\ ,\quad u_{y'} = \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\ ,\quad u_{z'} = \frac{d\mathfrak{z}}{dt} \qquad (95.$$

zurückkommen.

Bezeichnet man zur Abkürzung wie früher die normalen Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'}$, $\frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial z'}$ durch $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die Dehnungen $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y'} = \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x'}$, $\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial x'}$, $\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z'} = \frac{\partial \mathfrak{z}}{\partial y'}$ durch $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$, und die Geschwindigkeiten $\frac{d\mathfrak{x}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{y}}{dt}$, $\frac{d\mathfrak{z}}{dt}$ durch $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$, $\mathfrak{u}_z$, und eliminirt aus den Gleichungen (94) die $u_{y'}$ und $u_{z'}$, so ergibt sich der Werth von $u_{x'}$ durch die Gleichung:

$$u_{x'}[(1-\mathfrak{a})(1-\mathfrak{b})(1-\mathfrak{c})-\mathfrak{f}^2(1-\mathfrak{c})-\mathfrak{g}^2(1-\mathfrak{b})-\mathfrak{h}^2(1-\mathfrak{a})-2\mathfrak{fgh}]$$
$$=\mathfrak{u}_x((1-\mathfrak{b})(1-\mathfrak{c})-\mathfrak{h}^2)+\mathfrak{u}_y(\mathfrak{f}(1-\mathfrak{c})+\mathfrak{gh})+\mathfrak{u}_z(\mathfrak{g}(1-\mathfrak{b})+\mathfrak{fh})\,.$$

Werden darin alle Glieder, welche Producte der Dehnungen enthalten, vernachlässigt, so findet man zuerst

$$u_{x'}[1-\mathfrak{a}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c}) = \mathfrak{u}_x(1-\mathfrak{b}-\mathfrak{c})+\mathfrak{f}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{g}\mathfrak{u}_z$$

und wenn dann auf der rechten Seite $-\mathfrak{a}\mathfrak{u}_x + \mathfrak{a}\mathfrak{u}_x$ zugesetzt, der Werth (92) der räumlichen Ausdehnung ϱ beachtet, und in gleicher Weise in Bezug auf $u_{y'}$ und $u_{z'}$ verfahren wird, so folgen die Ausdrücke:

$$(u_{x'}-\mathfrak{u}_x)(1-\varrho) = \mathfrak{a}\mathfrak{u}_x+\mathfrak{f}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{g}\mathfrak{u}_z$$
$$(u_{y'}-\mathfrak{u}_y)(1-\varrho) = \mathfrak{f}\mathfrak{u}_x+\mathfrak{b}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{f}\mathfrak{u}_z$$
$$(u_{z'}-\mathfrak{u}_z)(1-\varrho) = \mathfrak{g}\mathfrak{u}_x+\mathfrak{h}\mathfrak{u}_y+\mathfrak{c}\mathfrak{u}_z\,.$$

Man sieht hieraus, daß man noch die Summen:

$$\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial y'}\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'}\frac{d\mathfrak{z}}{dt},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial x'}\frac{d\mathfrak{x}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'}\frac{d\mathfrak{y}}{dt} + \frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial z'}\frac{d\mathfrak{z}}{dt},$$

u. s. f.

muß vernachläßigen können, wenn $u_{x'} = \mathfrak{u}_x$, $u_{y'} = \mathfrak{u}_y$, $u_{z'} = \mathfrak{u}_z$ werden soll.

Unter dieser Voraussetzung hat man dann weiter

$$\frac{d.u_{x'}}{dt} = \frac{d.\mathfrak{u}_x}{dt} = \frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \mathfrak{u}_x\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial x'} + \mathfrak{u}_y\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial y'} + \mathfrak{u}_z\frac{\partial \mathfrak{u}_x}{\partial z'}$$

$$= \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \frac{d\mathfrak{x}}{dt}\frac{d\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial x'}}{dt} + \frac{d\mathfrak{y}}{dt}\frac{d\frac{\partial \mathfrak{y}}{\partial y'}}{dt} + \frac{d\mathfrak{z}}{dt}\frac{d\frac{\partial \mathfrak{x}}{\partial z'}}{dt}$$

$$= \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2} + \mathfrak{u}_x\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{u}_y\frac{d\mathfrak{f}}{dt} + \mathfrak{u}_z\frac{d\mathfrak{g}}{dt}.$$

Die vorhergehende Voraussetzung:

$$\mathfrak{a}\mathfrak{u}_x + \mathfrak{f}\mathfrak{u}_y + \mathfrak{g}\mathfrak{u}_z = 0$$

gibt aber auch

$$\mathfrak{u}_x\frac{d\mathfrak{a}}{dt} + \mathfrak{u}_y\frac{d\mathfrak{f}}{dt} + \mathfrak{u}_z\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = -\left(\mathfrak{a}\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} + \mathfrak{f}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} + \mathfrak{g}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}\right).$$

und damit kann man dem Werthe von $\frac{d.u_{x'}}{dt}$ noch die Form geben:

$$\frac{d.u_{x'}}{dt} = (1-\mathfrak{a})\frac{d\mathfrak{u}_x}{dt} - \mathfrak{f}\frac{d\mathfrak{u}_y}{dt} - \mathfrak{g}\frac{d\mathfrak{u}_z}{dt}.$$

Aehnliche Formen wird man dann auch für die vollständigen Aenderungsgesetze der Geschwindigkeiten $u_{y'}$ und $u_{z'}$ in Bezug auf die Aenderung der Zeit erhalten und daraus schließen, daß wenn die Aenderungen der Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}_x$, $\mathfrak{u}_y$ und $\mathfrak{u}_z$ in Bezug auf den Uebergang von einem Punkte zu einem andern, oder wenn die geometrischen Dehnungen durchaus sehr klein sind und bleiben, die Aenderungen dieser Dehnungen in Bezug auf die Zeit allein also vernachläßigt werden können, man die einfachen Beziehungen hat:

$$96.)\quad \frac{d.u_{x'}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\ ,\qquad \frac{d.u_{y'}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\ ,\qquad \frac{d.u_{z'}}{dt} = \frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}\ .$$

Unter denselben Voraussetzungen wird aber auch die Aenderung der geometrischen Raumausdehnung ϱ in Bezug auf die Zeit sehr klein sein, und daher das Aenderungsgesetz $\frac{d\varrho}{dt}$ gleich Null genommen werden dürfen, wodurch die Beziehung (72) auf die einfachen Gleichungen:

$$97.)\qquad \frac{d.q}{dt} = 0\ ,\qquad q = q_0\ ,$$

zurückkommt, welche aussprechen, daß in diesem Falle die Dichte in irgend einem Punkte des Systems von der Zeit unabhängig und immer dieselbe bleibt, wie am Anfang derselben, oder richtiger ausgedrückt, daß die Aenderung der Dichte in irgend einem Punkte immer so klein ist, daß man dieselbe als unveränderlich betrachten darf.

Hat man demnach die geometrischen Spannungen T_x, T_y, S_z, u. s. f. je nach der Natur des Systems in Function der geometrischen Dehnungen $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial x}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial y}$, $\frac{\partial\mathfrak{x}}{\partial z}$, u. s. f. ausgedrückt, und die geometrischen Kräfte X, Y, Z mittels der Beziehungen

$$x' = x^{(0)} + \mathfrak{x}\ ,\qquad y' = y^{(0)} + \mathfrak{y}\ ,\qquad z' = z^{(0)} + \mathfrak{z}$$

ebenso in Function der Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$, so werden unter den vorhergehenden Beschränkungen die Gleichungen (74) die Form annehmen:

$$98.)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial T_x}{\partial x'} + \frac{\partial S_z}{\partial y'} + \frac{\partial S_y}{\partial z'} + q\left(X - \frac{d^2\mathfrak{X}}{dt^2}\right) &= q\,\frac{d^2\mathfrak{x}}{dt^2}\\
\frac{\partial S_z}{\partial x'} + \frac{\partial T_y}{\partial y'} + \frac{\partial S_x}{\partial z'} + q\left(Y - \frac{d^2\mathfrak{Y}}{dt^2}\right) &= q\,\frac{d^2\mathfrak{y}}{dt^2}\\
\frac{\partial S_y}{\partial x'} + \frac{\partial S_x}{\partial y'} + \frac{\partial T_z}{\partial z'} + q\left(Z - \frac{d^2\mathfrak{Z}}{dt^2}\right) &= q\,\frac{d^2\mathfrak{z}}{dt^2}
\end{aligned}\right.$$

und mit einer der Gleichungen (97) der Zahl nach genügen, um die Veränderlichen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ und q in Function der Veränderlichen x', y', z' und t auszudrücken, also die Gesetze der innern Bewegung des Punktes x' y' z' in Bezug auf das mit dem Mittelpunkte der Masse oder irgend einem andern Punkte des Systems nach einem bekannten Gesetze parallel fortschreitende Coordinatensystem zu bestimmen.

Die Gleichungen der innern Bewegung eines ähnlichen veränderlichen Systems, das sich im Zustande des äußern Gleichgewichtes befindet, gehen aus den obigen einfach dadurch hervor, daß man den Anfangspunkt der x, y, z in einen Punkt verlegt, welcher keine innere Bewegung besitzt und die auf diesen Punkt sich beziehenden äußern Geschwindigkeiten $\frac{dX}{dt}$, $\frac{dY}{dt}$, $\frac{dZ}{dt}$ als unveränderlich annimmt, oder wenn das Gleichgewicht ein ruhendes sein soll, gleich Null setzt.

§. 45.

Nach den vorhergehenden Untersuchungen über den innern Zustand eines stetigen veränderlichen Systems in Bezug auf ein parallel fortschreitendes rechtwinkliges Coordinatensystem lassen sich die entsprechenden allgemeinen Gleichungen für die innere Bewegung oder das innere Gleichgewicht eines solchen Systems in Bezug auf ein fortschreitendes und sich drehendes rechtwinkliges Coordinatensystem leicht aus der Vergleichung der Gleichungen (74) mit den für ein nicht stetig zusammenhängendes System von materiellen Punkten gefundenen Gleichungen (46) ableiten. Denn diese Vergleichung zeigt, daß die erstern dieser Gleichungen aus den letztern hervorgehen, wenn statt der Masse m_i eines beliebigen Punktes im nicht stetigen System die geometrische Dichte q in dem Punkte xyz des stetigen Systems, und statt der zu den Achsen der x, y oder z parallelen innern Wirkungen:

$$\sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\alpha_{h,i} - \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\alpha_{i,k} \quad , \quad \sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\beta_{h,i} - \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\beta_{i,k} \quad ,$$

$$\sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos\gamma_{h,i} - \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos\gamma_{i,k}$$

die entsprechenden Aenderungsgesetze der geometrischen Spannungen in drei zu jenen Achsen normalen Schnitten in dem betreffenden Punkte eingeführt werden. Wir schließen daraus weiter, daß auch die Gleichungen für die Bewegung eines stetigen veränderlichen Systems, beziehungsweise eines Punktes in demselben in Bezug auf ein rechtwinkliches Coordinatensystem, welches zugleich eine drehende und eine fortschreitende Bewegung besitzt, sich durch ähnliche Substitutionen aus den entsprechenden Gleichungen (51) in §. 31 für den Punkt M_i eines nicht stetigen Systems sich ergeben müssen.

Sei demnach wieder das bewegliche Coordinatensystem das der ξ, η, ζ, sein Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse des veränderlichen Systems, und seine Lage gegen die festen Coordinatenachsen der x, y, z am Ende der Zeit t durch die Coordinaten X, Y, Z jenes Anfangspunktes und die Winkel ϑ, ω und ψ in Function von t bestimmt; es werden dann auch seine augenblickliche Winkelgeschwindigkeit φ, deren Componenten $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$ um die Achsen der ξ, η und ζ und damit die Lage der augenblicklichen Drehungsachse in Bezug auf diese Achsen sowohl, als in Bezug auf die festen Coordinatenachsen durch die in §. 185 bis 187 des zweiten Buches abgeleiteten Beziehungen zwischen diesen Größen gegeben sein.

Die geometrischen Componenten der an dem Punkte $\xi\eta\zeta$ des Systems angreifenden äußern Kraft bezeichne ich mit $q\Xi$, qH, qZ, behalte aber für die Componenten derjenigen Kräfte, welche nothwendig sind, um den betreffenden Punkt vom Ende der Zeit t an in Bezug auf die Achsen der ξ, η und ζ im Gleichgewicht zu halten, und welche nun ebenfalls in geometrische Kräfte übergehen, die in §. 31 angewendete Bezeichnung bei, nämlich die Bezeichnung $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ für die Componenten der Kraft, welche dem betreffenden Punkte diejenige Beschleunigung ertheilen kann, welche er vom Ende der Zeit t an erhalten würde, wenn er von diesem Augenblicke an mit den Achsen der ξ, η und ζ fest verbunden und der Anfangspunkt dieser Achsen unbeweglich wäre; und die Bezeichnung $F \cos l$, $F \cos m$, $F \cos n$ für die geometrischen Componenten der Kraft F, welche in demselben Punkte die Beschleunigung $2\varphi\mathfrak{V}\cos\delta$ zu erzeugen vermag, wenn wie am genannten Orte $\mathfrak{V}$ die innere Geschwindigkeit dieses Punktes und δ den Winkel zwischen ihrer Richtung und der augenblicklichen Drehungs-Achse des Systems bedeutet. Für die erstern Componenten wird man daher gemäß der Gleichungen (a) in §. 31 im jetzigen Falle die Werthe erhalten:

$$\left\{\begin{aligned}
\mathfrak{X} &= q\left(\zeta\frac{d\mathfrak{q}}{dt} - \eta\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \mathfrak{p}(\mathfrak{q}\eta + \mathfrak{r}\zeta) - (\mathfrak{q}^2 + \mathfrak{r}^2)\xi\right)\\
\mathfrak{Y} &= q\left(\xi\frac{d\mathfrak{r}}{dt} - \zeta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} + \mathfrak{q}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{r}\zeta) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{r}^2)\eta\right)\\
\mathfrak{Z} &= q\left(\eta\frac{d\mathfrak{p}}{dt} - \xi\frac{d\mathfrak{q}}{dt} + \mathfrak{r}(\mathfrak{p}\xi + \mathfrak{q}\eta) - (\mathfrak{p}^2 + \mathfrak{q}^2)\zeta\right)
\end{aligned}\right.$$

und die letztern Componenten werden durch die den Gleichungen (b) daselbst entsprechenden Ausdrücke:

$$F\cos l = -2q\left(r\frac{d\eta}{dt} - q\frac{d\zeta}{dt}\right), \quad F\cos m = -2q\left(p\frac{d\zeta}{dt} - r\frac{d\xi}{dt}\right)$$

$$F\cos n = -2q\left(q\frac{d\xi}{dt} - p\frac{d\eta}{dt}\right)$$

gegeben sein.

In den Gleichungen (51) wurden die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der Kraft, welche die äußere Beschleunigung des Punktes M_i oder $\xi_i \eta_i \zeta_i$ parallel zu den festen Coordinaten zu erzeugen vermag, oder welche, im entgegengesetzten Sinne wirkend, diesen Punkt in Bezug auf das feste Coordinatensystem im Zustande des äußern Gleichgewichtes erhalten würde, durch

$$m_i \frac{\Sigma . \Xi}{\Sigma . m}, \quad m_i \frac{\Sigma . H}{\Sigma . m}, \quad m_i \frac{\Sigma . Z}{\Sigma . m}$$

bezeichnet. Im jetzigen Falle läßt sich mit dieser Bezeichnung keine klare Vorstellung mehr verbinden; es wird daher nothwendig werden, die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten dieser Kraft, deren Componenten nach den festen Achsen der x, y, z in den Gleichungen (74) bereits durch

$$q\frac{d^2X}{dt^2}, \quad q\frac{d^2Y}{dt^2}, \quad q\frac{d^2Z}{dt^2}$$

vorgestellt sind, in entsprechender Weise zu bezeichnen und auszudrücken. Dazu wollen wir die Resultirenden aus den geometrischen Componenten qX, qY, qZ der äußern Kraft und den vorhergenannten Kräften im entgegengesetzten Sinne genommen unter der Bezeichnung $q\hat{X}$, $q\hat{Y}$, $q\hat{Z}$ zusammenfassen, so daß man die Beziehungen hat:

$$q\hat{X} = q\left(X - \frac{d^2X}{dt^2}\right), \quad q\hat{Y} = q\left(Y - \frac{d^2Y}{dt^2}\right), \quad q\hat{Z} = q\left(Z - \frac{d^2Z}{dt^2}\right).$$

Die zu den Achsen der ξ, η, ζ parallelen Componenten der Resultirenden dieser Kräfte werden wir dann durch $q\hat{\Xi}$, $q\hat{H}$, $q\hat{Z}$ vorstellen, und haben zwischen diesen und jenen Componenten die bekannten Beziehungen:

$$\hat{\Xi} = a\hat{X} + b\hat{Y} + c\hat{Z},$$

$$\hat{H} = a'\hat{X} + b'\hat{Y} + c'\hat{Z},$$

$$\hat{Z} = a''\hat{X} + b''\hat{Y} + c''\hat{Z},$$

in welchen wieder a, b, c, etc. die Cosinus der Winkel zwischen den festen Coordinatenachsen und den sich drehenden Achsen der ξ, η und ζ bezeichnen und wie die Winkel ϑ, ω, ψ in Function der Zeit t gegeben vorausgesetzt werden. Es darf kaum bemerkt werden, daß für den Fall, wo der Anfangspunkt der sich drehenden Coordinaten unbeweglich ist oder nur eine gleichförmige geradlinige Bewegung besitzt, die geometrischen Kräfte $q\widehat{\Xi}$, $q\widehat{H}$, $q\widehat{Z}$ und die Componenten $q\Xi$, qH, qZ gleichbedeutend werden, wie die $q\widehat{X}$, $q\widehat{Y}$, $q\widehat{Z}$ auf qX, qY, qZ zurückkommen.

Bezeichnen wir endlich noch den neuen Achsen entsprechend die Componenten der geometrischen Spannungen in dem Punkte $\xi\eta\zeta$ und zwar in den drei zu den Achsen der ξ, η und ζ senkrechten Schnitten mit

$$T_\xi\,,\ S_\zeta\,,\ S_\eta\quad,\quad S_\zeta\,,\ T_\eta\,,\ S_\xi\quad,\quad S_\eta\,,\ S_\xi\,,\ T_\zeta\,,$$

die Componenten $\frac{d\xi}{dt}$, $\frac{d\eta}{dt}$, $\frac{d\zeta}{dt}$ der innern Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ nach denselben Achsen mit $\mathfrak{u}_\xi$, $\mathfrak{u}_\eta$, $\mathfrak{u}_\zeta$, und die vollständigen Aenderungsgesetze dieser Veränderlichen in Bezug auf die Zeit mit $\frac{d.\mathfrak{u}_\xi}{dt}$ u. s. f., so daß man hat

$$\frac{d.\mathfrak{u}_\xi}{dt}=\frac{d\mathfrak{u}_\xi}{dt}+\mathfrak{u}_\xi\frac{\partial\mathfrak{u}_\xi}{\partial\xi}+\mathfrak{u}_\eta\frac{\partial\mathfrak{u}_\xi}{\partial\eta}+\mathfrak{u}_\zeta\frac{\partial\mathfrak{u}_\xi}{\partial\zeta}$$

u. s. f.

so nehmen nun die Gleichungen für die innere Bewegung des Punktes $\xi\eta\zeta$ folgende Formen an:

$$99.)\ \begin{cases}\frac{\partial T_\xi}{\partial\xi}+\frac{\partial S_\zeta}{\partial\eta}+\frac{\partial S_\eta}{\partial\zeta}+q(\widehat{\Xi}-\mathfrak{X}+F\cos l)=q\frac{d.\mathfrak{u}_\xi}{dt}\\ \frac{\partial S_\zeta}{\partial\xi}+\frac{\partial T_\eta}{\partial\eta}+\frac{\partial S_\xi}{\partial\zeta}+q(\widehat{H}-\mathfrak{Y}+F\cos m)=q\frac{d.\mathfrak{u}_\eta}{dt}\\ \frac{\partial S_\eta}{\partial\xi}+\frac{\partial S_\xi}{\partial\eta}+\frac{\partial T_\zeta}{\partial\zeta}+q(\widehat{Z}-\mathfrak{Z}+F\cos n)=q\frac{d.\mathfrak{u}_\zeta}{dt}\end{cases}$$

und geben die Bedingungen des innern Gleichgewichtes, wenn die rechten Seiten gleich Null gesetzt werden. Für die Untersuchung der Bewegung dagegen müssen dieselben noch mit der Bedingungsgleichung (71) verbunden werden, in welche für unsern jetzigen Fall nur die $u_{x'}$, $u_{y'}$ und $u_{z'}$ durch die u_ξ, u_η, u_ζ, wie die x', y', z' durch die ξ, η und ζ zu ersetzen sind.

Wenn sich das System um eine feste Achse dreht, welche wir als die der ζ nehmen wollen, so gehen die vorhergehenden Gleichungen, wie man aus den Gleichungen (55) schließen wird, in folgende über:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\delta T_\xi}{\delta \xi}+\frac{\delta S_\zeta}{\delta \eta}+\frac{\delta S_\eta}{\delta \zeta}+q\left(\Xi+\eta\frac{d\varphi}{dt}-\xi\varphi^2-2\varphi\frac{d\eta}{dt}\right)&=q\frac{d.u_\xi}{dt}\\ \frac{\delta S_\zeta}{\delta \zeta}+\frac{\delta T_\eta}{\delta \eta}+\frac{\delta S_\xi}{\delta \zeta}+q\left(H+\xi\frac{d\varphi}{dt}-\eta\varphi^2+2\varphi\frac{d\xi}{dt}\right)&=q\frac{d.u_\eta}{dt}\\ \frac{\delta S_\eta}{\delta \xi}+\frac{\delta S_\xi}{\delta \eta}+\frac{\delta T_\zeta}{\delta \zeta}+qZ&=q\frac{d.u_\zeta}{dt}\end{aligned}\right\}, (100.$$

und daraus folgen wieder die Bedingungen für das ruhende Gleichgewicht bei einer gleichförmigen äußern drehenden Bewegung des Systems, wenn die Glieder: $2\varphi\frac{d\eta}{dt}$, $2\varphi\frac{d\xi}{dt}$, $\eta\frac{d\varphi}{dt}$ und $\xi\frac{d\varphi}{dt}$ und die rechten Seiten dieser Gleichungen Null werden.

Um übrigens diese Gleichungen anwenden zu können, müssen in denselben wie in den frühern die geometrischen Spannungen durch die geometrischen Dehnungen und die Geschwindigkeiten durch die Aenderungsgesetze der in der Zeit $t-t_0$ eingetretenen, nun zu den Achsen der ξ, η und ζ parallelen Aenderungen $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ der Lage des Punktes $\xi\eta\zeta$ in Bezug auf die Zeit ausgedrückt werden, wofür alle in den §§. 39 bis 44 abgeleiteten Beziehungen gültig bleiben.

§. 46.

Die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines stetigen veränderlichen Systems, sowie die Gleichungen für die innere Bewegung eines solchen, welche in den vorhergehenden §.§. abgeleitet wurden, beziehen sich immer nur auf einen beliebigen geometrischen Punkt des Systems; um daher den Zustand des ganzen Systems beurtheilen zu können, müssen jene Bedingungen und Bewegungsgesetze durch Integration in Bezug auf die drei unabhängigen Veränderlichen x, y, z, auf

das ganze System ausgedehnt werden. Es müssen folglich im jetzigen Falle außer dem anfänglichen Zustande des Systems noch die an den Begrenzungsflächen obwaltenden Verhältnisse, also die in denselben stattfindenden geometrischen Spannungen gegeben sein, und es werden demnach die Schwierigkeiten einleuchten, welche zu überwinden sind, wenn, wie es gewöhnlich verlangt wird, die Form bestimmt werden soll, welche das System annimmt oder annehmen muß, damit es sich unter dem Einflusse gegebener äußerer Kräfte im Zustande des innern Gleichgewichtes befindet.

Für die meisten Untersuchungen wird auch vorausgesetzt, daß sich das System durch äußere feste Hindernisse im Zustande des äußern Gleichgewichtes befinde; für diese Fälle sind dann wieder die von jenen Hindernissen zu leistenden Widerstände als äußere Kräfte in die Gleichungen für das innere Gleichgewicht oder die innere Bewegung einzuführen und durch Elimination zu entfernen, und man wird einsehen, daß dadurch jene Schwierigkeiten in der Bestimmung der äußern Form des Systems für inneres Gleichgewicht nicht vermindert werden.

Auf ähnliche Weise müssen jene Fälle behandelt werden, wo das System, dessen innere Zustände untersucht werden sollen, eine gezwungene äußere Bewegung besitzt; solche Fälle haben sich übrigens für stetige veränderliche Systeme, wenn von den Flüssigkeiten hier Umgang genommen wird, in der Anwendung noch keine dargeboten; es ist daher zu einer weitern Ausführung der vorstehenden Bemerkung keine Veranlassung gegeben.

In den beiden folgenden Kapitel sollen nun einige einfache Beispiele für die Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten allgemeinen Gesetze gegeben werden; im nächsten für solche veränderliche Systeme, welche als nicht stetige zu behandeln sind, und zwar in Bezug auf das innere Gleichgewicht das Seilpolygon, das Knie, die Roberval'sche Wage, in Bezug auf innere Bewegung das Planetensystem; im dritten dagegen sollen stetig veränderliche Systeme untersucht und die vorhergehenden Betrachtungen insbesondere auf vollkommen biegsame und vollkommen elastische Systeme angewendet werden.

Zweites Kapitel.

Beispiele nicht stetiger veränderlicher Systeme. Seilpolygon, Knie, Roberval'sche Wage, Planetensystem.

§. 47.

Die Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines Systems, welches aus einer bestimmten Anzahl materieller Punkte besteht, finden ihre Anwendung bei der Bestimmung der Gestalt, welche ein vollkommen biegsamer und undehnbarer Faden annimmt, wenn an demselben eine bestimmte Anzahl der Größe und Richtung nach gegebener Kräfte angreifen, von dem stetig angreifenden Gewicht desselben also Umgang genommen wird.

Ein solches System von materiellen Punkten kann man sich immer unter der ursprünglichen Form einer geraden Linie von unveränderlicher Länge denken, welche sich in die Gestalt jeder gebrochenen oder stetig krummen Linie bringen läßt, ohne daß ihre Theile ein Bestreben zeigen, in eine andere Form zurückzukehren. Es ist zwar immer eine Ursache, also eine, wenn auch nur sehr kleine Kraft nothwendig, um eine Aenderung in der gegenseitigen Lage dieser Theile oder eine Biegung hervorzubringen; wenn diese aber einmal erzeugt ist, dann ist keine Kraft mehr nothwendig, um die Theile der Linie in dieser Lage zu erhalten; im Zustande des innern Gleichgewichtes sind daher nur die gegebenen äußern Kräfte und die von diesen zwischen den einzelnen Angriffspunkten in dem Faden hervorgerufenen Spannungen als innere Kräfte zu berücksichtigen. Diese Spannungen geben für jeden Punkt, welcher zwischen zwei Angriffspunkten äußerer Kräfte liegt, zwei gleiche Kräfte; diese müssen für den Gleichgewichtszustand einander direct entgegen gerichtet sein, und deßhalb alle diese Punkte in einer Geraden liegen, das System folglich die Gestalt eines Vieleckes annehmen, dessen Eckpunkte die Angriffspunkte der äußern Kraft sind, dessen Seiten aber in verschiedenen Ebenen liegen können.

Ein solches System wollen wir zuerst unter der Voraussetzung betrachten, daß die äußern Kräfte an bestimmten mit dem System fest verbundenen Punkten, deren gegenseitige Entfernungen unveränderlich sind, angreifen und dasselbe sich auch im Zustande des äußern Gleich=

gewichtes befinden soll. Sei also ABCDMN Fig. 11 ein solches System, P_0, P_1, P_2, etc., P_n die an den genannten Punkten angreifenden äußern Kräfte, von welchen wir noch weiter voraussetzen, daß sie von festen Punkten ausgehen, deren Entfernung in Bezug auf die Ausdehnung unsers veränderlichen Systems hinreichend groß ist, um ihre Richtungswinkel als unveränderlich annehmen zu können, wenn auch die Angriffspunkte derselben ihre Lage ändern. Diese Richtungswinkel gegen drei feste Achsen seien wie früher α_0, β_0, γ_0 für die Kraft P_0, α_1, β_1, γ_1 für die Kraft P_1 u. s. f., α_n, β_n, γ_n für die Kraft P_n. Ferner seien l_1, l_2 u. s. f., l_n die gegebenen Entfernungen der Angriffspunkte A und B, B und C, u. s. f., M und N, und x_0, y_0, z_0, x_1, y_1, z_1, u. s. f., x_n, y_n, z_n die Coordinaten dieser Angriffspunkte, wenn das System ins innere Gleichgewicht gekommen ist; endlich wollen wir die Richtungswinkel der Polygonseiten AB, BC, u. s. f., MN in Bezug auf die Coordinaten-Achsen mit a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2, u. s. f., a_n, b_n, c_n bezeichnen, und zwar immer in dem Sinne von A gegen B, von B gegen C, u. s. f., von M gegen N hin genommen, und dabei sogleich bemerken, daß diese Winkel und die Coordinaten der Eckpunkte durch die Beziehungen:

$$\cos a_1 = \frac{x_1 - x_0}{l_1}, \quad \cos b_1 = \frac{y_1 - y_0}{l_1}, \quad \cos c_1 = \frac{z_1 - z_0}{l_1},$$

$$\cos a_2 = \frac{x_2 - x_1}{l_2}, \quad \cos b_1 = \frac{y_2 - y_1}{l_2}, \quad \cos c_2 = \frac{z_2 - z_1}{l_2},$$

u. s. f.,

$$\cos a_n = \frac{x_n - x_{n-1}}{l_n}, \quad \cos b_n = \frac{y_n - y_{n-1}}{l_n}, \quad \cos c_n = \frac{z_n - z_{n-1}}{l_n},$$

in gegenseitiger Abhängigkeit stehen.

Damit nun zuerst äußeres Gleichgewicht stattfinden kann, müssen die äußern Kräfte P den Bedingungen des §. 7 genügen, d. h. den Bedingungen:

$$\text{a.)} \left\{ \begin{array}{l} P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_n \cos\alpha_n = 0, \\ P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_n \cos\beta_n = 0, \\ P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_n \cos\gamma_n = 0, \end{array} \right.$$

welche aussprechen, daß die fördernde Gesammtwirkung dieser Kräfte Null ist, oder daß sich diese Kräfte, wenn sie einen und denselben

Angriffspunkt hätten, im Gleichgewicht halten müßten. Damit ist in unserm jetzigen Falle zugleich auch die Bedingung erfüllt, daß die drehende Gesammtwirkung jener Kräfte Null sei, wenn die Angriffspunkte derselben so bestimmt sind, wie sie durch das innere Gleichgewicht bedingt werden; es könnte dieses daher erst nachgewiesen werden, wenn wir die Bedingungen für das innere Gleichgewicht aufgestellt haben.

Im vorliegenden Falle stehen immer nur zwei aufeinanderfolgende Punkte in gegenseitiger Verbindung; es reduziren sich daher die Summen der an dem Punkte J angreifenden innern Wirkungen:

$$\sum_{h=1}^{h=i-1} . J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} \quad , \quad \sum_{k=i+1}^{k=n} . J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} \quad , \quad \text{u. s. f.}$$

auf die einfachen Glieder

$$J_{i-1,i} \cos \alpha_{i-1,i} \quad , \quad J_{i,i+1} \cos \alpha_{i,i+1} \quad , \quad \text{u. s. f.} ,$$

und die Gleichungen (54) für das Gleichgewicht des Eckpunktes J unsers Polygons werden damit und mit der Beachtung, daß die Winkel $\alpha_{i-1,i}$, $\beta_{i-1,i}$, $\gamma_{i-1,i}$ nach der vorher angegebenen Bezeichnung durch a_i , b_i , c_i und die Winkel $\alpha_{i,i+1}$, $\beta_{i,i+1}$, $\gamma_{i,,+1}$ durch a_{i+1} , b_{i+1} , c_{i+1} zu ersetzen sind, weil die Richtungen der innern Kräfte $J_{i-1,i}$ und $J_{i,i+1}$ mit den Richtungen der Vieleckseiten HJ und JK zusammenfallen, und wenn man noch die innern Kräfte $J_{i-1,i}$ und $J_{i,i+1}$ als Spannungen der Seiten HJ und JK derselben Bezeichnung entsprechend nun durch T_i und T_{i+1} ersetzt, folgende

$$\left.\begin{array}{l} P_i \cos \alpha_i - T_i \cos a_i + T_{i+1} \cos a_{i+1} \\ P_i \cos \beta_i - T_i \cos b_i + T_{i+1} \cos b_{i+1} \\ P_i \cos \gamma_i - T_i \cos c_i + T_{i+1} \cos c_{i+1} \end{array}\right\} .$$

Man zieht daraus für die einzelnen Punkte A, B, C, N die besondern Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} P_0 \cos \alpha_0 + T_1 \cos a_1 \\ P_0 \cos \beta_0 + T_1 \cos b_1 \\ P_0 \cos \gamma_0 + T_1 \cos c_1 \end{array}\right\} , \quad \left.\begin{array}{l} P_1 \cos \alpha_1 - T_1 \cos a_1 + T_2 \cos a_2 \\ P_1 \cos \beta_1 - T_1 \cos b_1 + T_2 \cos b_2 \\ P_1 \cos \gamma_1 - T_1 \cos c_1 + T_2 \cos c_2 \end{array}\right\} ,$$

$$\left\{\begin{array}{l} P_2 \cos\alpha_2 - T_2 \cos a_2 + T_3 \cos a_3 \;, \\ P_2 \cos\beta_2 - T_2 \cos b_2 + T_3 \cos b_3 \;, \\ P_2 \cos\gamma_2 - T_2 \cos c_2 + T_3 \cos c_3 \;, \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} P_n \cos\alpha_n - T_n \cos a_n \;, \\ P_n \cos\beta_n - T_n \cos b_n \;, \\ P_n \cos\gamma_n - T_n \cos c_n \;, \end{array}\right.$$

und schließt daraus, 1) daß die Richtungen der ersten und letzten Seite AB und MN durch die Richtungen der Kräfte P_0 und P_n bestimmt, und ihre Spannungen diesen Kräften gleich sind, 2) daß an jedem Eck- oder Knotenpunkte nur drei Kräfte angreifen, eine äußere Kraft und die Spannungen der beiden anstoßenden Seiten, woraus nach §. 16 des ersten Buches weiter folgt, daß im Zustande des Gleichgewichtes immer zwei anstoßende Seiten mit der an ihrem Knotenpunkte angreifenden äußern Kraft in einer Ebene liegen müssen, und daß die Resultirende der Spannungen jener Seiten dieser Kraft gleich und entgegengesetzt ist, diese Spannungen dem Sinne der Richtung nach immer von dem Knotenpunkte aus im Sinne der Seiten genommen.

Man kann aber auch aus den vorhergehenden Gleichungen, durch fortschreitende Summirung der denselben Coordinaten-Achsen entsprechenden, die Spannungen T_1, T_2, u. s. f. eliminiren und die Spannung T_i der Seite HJ, oder ihre Componenten unmittelbar durch die äußern Kräfte ausdrücken; man findet so für die Componenten der Spannung T_2 der Seite BC die Werthe:

$$\left\{\begin{array}{l} T_2 \cos a_2 = -(P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1) \\ T_2 \cos b_2 = -(P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1) \\ T_2 \cos c_2 = -(P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1) \end{array}\right.$$

für die Spannung T_3 die Componenten:

$$\left\{\begin{array}{l} T_3 \cos a_3 = -(P_0 \cos\alpha_0 + P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2) \\ T_3 \cos b_3 = -(P_0 \cos\beta_0 + P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2) \\ T_3 \cos c_3 = -(P_0 \cos\gamma_0 + P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2) \end{array}\right.$$

u. s. f.; also allgemein für die Spannung T_i die Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned}T_i cos\, a_i &= -(P_0\, cos\, \alpha_0 + P_1\, cos\, \alpha_1 + P_2\, cos\, \alpha_2 + \text{etc.} + P_{i-1} cos\, \alpha_{i-1})\\ T_i cos\, b_i &= -(P_0\, cos\, \beta_0 + P_1\, cos\, \beta_1 + P_2\, cos\, \beta_2 + \text{etc.} + P_{i-1}\, cos\, \beta_{i-1})\\ T_i cos\, c_i &= -(P_0\, cos\, \gamma_0 + P_1\, cos\, \gamma_1 + P_2\, cos\, \gamma_2 + \text{etc.} + P_{i-1}\, cos\, \gamma_{i-1})\end{aligned}\right\}(b.$$

oder in abgekürzter Form

$$\left.\begin{aligned}&-T_i\, cos\, a = \sum_{h=0}^{h=i-1} .\ P_h\, cos\, \alpha_h\ ,\quad -T_i\, cos\, b_i = \sum_{h=0}^{h=i-1} .\ P_h\, cos\, \beta_h\ ,\\ &\qquad -T_i\, cos\, c_i = \sum_{h=0}^{h=i-1} .\ P_h\, cos\, \gamma_h\ .\end{aligned}\right\}(b.$$

Fängt man die Elimination von dem andern Endpunkte N des Polygons an, so hat man zuerst

$$\left.\begin{aligned}T_{n-1}\, cos\, a_{n-1} &= P_{n-1}\, cos\, \alpha_{n-1} + P_n\, cos\, \alpha_n\\ T_{n-1}\, cos\, b_{n-1} &= P_{n-1}\, cos\, \beta_{n-1} + P_n\, cos\, \beta_n\\ T_{n-1}\, cos\, c_{n-1} &= P_{n-1}\, cos\, \gamma_{n-1} + P_n\, cos\, \gamma_n\end{aligned}\right\};$$

ferner wird

$$\left.\begin{aligned}T_{n-2}\, cos\, a_{n-2} &= P_{n-2}\, cos\, \alpha_{n-2} + P_{n-1}\, cos\, \alpha_{n-1} + P_n\, cos\, \alpha_n\\ T_{n-2}\, cos\, b_{n-2} &= P_{n-2}\, cos\, \beta_{n-2} + P_{n-1}\, cos\, \beta_{n-1} + P_n\, cos\, \beta_n\\ T_{n-2}\, cos\, c_{n-2} &= P_{n-2}\, cos\, \gamma_{n-2} + P_{n-1}\, cos\, \gamma_{n-1} + P_n\, cos\, \gamma_n\end{aligned}\right\},$$

u. s. f., und demnach folgt:

$$\left.\begin{aligned}T_i\, cos\, a_i &= P_i\, cos\, \alpha_i + P_{i+1}\, cos\, \alpha_{i+1} + \text{etc.} + P_n\, cos\, \alpha_n\\ T_i\, cos\, b_i &= P_i\, cos\, \beta_i + P_{i+1}\, cos\, \beta_{i+1} + \text{etc.} + P_n\, cos\, \beta_n\\ T_i\, cos\, c_i &= P_i\, cos\, \gamma_i + P_{i+1}\, cos\, \gamma_{i+1} + \text{etc.} + P_n\, cos\, \gamma_n\end{aligned}\right\}, (c.$$

oder in abgekürzter Form

c.) $$\left\{\begin{aligned} T_i \cos a_i &= \sum_{k=i}^{k=n} . P_k \cos \alpha_k \;, \qquad T_i \cos b_i = \sum_{k=i}^{k=n} . P_k \cos \beta_k \;, \\ T_i \cos c_i &= \sum_{k=i}^{k=n} . P_k \cos \gamma_k \;. \end{aligned}\right.$$

Diese Ausdrücke zeigen, daß die Spannung einer Polygon-Seite der fördernden Resultirenden aller von einem Ende herein bis zum ersten Knotenpunkte dieser Seite angreifenden äußern Kräfte gleich und direct entgegengesetzt ist, und man wird leicht sehen, daß dieß eine nothwendige Folge der Gleichungen (a) ist, weil die Spannung einer Seite an ihren Knotenpunkten zwei gleiche und direct entgegengesetzte Kräfte vorstellt, weßhalb denn auch die Summen der entsprechenden Gleichungen (b) und (c) auf die Gleichungen (a) zurückführen.

§. 48.

Die vorhergehenden Gleichungen dienen insbesondere dazu, die Spannungen und Richtungen der einzelnen Polygonseiten zu berechnen und mittels der gegebenen Seitenlängen l_1, l_2 u. s. f. die Coordinaten der Eckpunkte, also Gestalt und Lage des Polygons zu bestimmen. Diese Bestimmung hat keine Schwierigkeit, wenn die äußern Kräfte alle gegeben sind. Denn man hat nach dem Vorhergehenden für die erste Seite

$$T_1 = P_0 \;, \quad a_1 = \pi + \alpha_0 \;, \quad b_1 = \pi + \beta_0 \;, \quad c_1 = \pi + \gamma_0$$

und wenn die Coordinaten x_0, y_0, z_0 des Punktes A für den Fall, daß sie nicht gegeben sind, einstweilen beliebig angenommen werden, so ergeben sich für die des Punktes B die Werthe:

$$x_1 = x_0 + l_1 \cos a_1 \;, \quad y_1 = y_0 + l_1 \cos b_1 \;, \quad z_1 = z_0 + l_1 \cos c_1 \;.$$

Für die zweite Seite BC berechnet man zuerst die Werthe von $T_2 \cos a_2$, $T_2 \cos b_2$, $T_2 \cos c_2$ nach den Gleichungen (b), zieht daraus auf bekanntem Wege T_2 und die Winkelfunctionen $\cos a_2$, $\cos b_2$, $\cos c_2$ und hat dann für den Punkt C die Coordinaten:

$$x_2 = x_1 + l_2 \cos a_2 \;, \quad y_2 = y_1 + l_2 \cos b_2 \;, \quad z_2 = z_1 + l_2 \cos c_2 \;.$$

Im Allgemeinen hat man also

$$\left.\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + l_{i+1}\cos a_{i+1} \\ y_{i+1} &= y_i + l_{i+1}\cos b_{i+1} \\ z_{i+1} &= z_i + l_{i+1}\cos c_{i+1} \end{aligned}\right\},$$

und rechnet damit von einem Eckpunkte zum andern fort, bis man die Coordinaten des Punktes N erhalten hat. Wenn dann die Lage eines der Eckpunkte voraus bestimmt ist, so darf man nur das ganze Polygon parallel mit sich verrücken, also die Coordinaten aller Eckpunkte um diejenigen Unterschiede ändern, welche zwischen den vorherberechneten und den gegebenen Coordinaten jenes der Lage nach bestimmten Eckpunktes zum Vorschein kommen.

Auf dieselbe Weise läßt sich die Gestalt und Lage des Polygons auch in dem Falle noch bestimmen, wenn einer der Endpunkte A oder N befestigt ist, weil der unbekannte Widerstand P_0 oder P_n, welchen dieser Punkt zu leisten hat, um das äußere Gleichgewicht zu erhalten, immer mittels der Gleichungen (a) der Größe und Richtung nach berechnet werden kann. Wenn aber die beiden Endpunkte befestigt, also P_0 und P_n beide unbekannt sind, so bleibt nichts anderes übrig, als die Coordinaten aller Eckpunkte von A bis N nach und nach in Function der Unbekannten $T_1 \cos a_1$, $T_1 \cos b_1$, $T_1 \cos c_1$ oder $P_0 \cos \alpha_0$, $P_0 \cos \beta_0$, $P_0 \cos \gamma_0$ auszudrücken, die drei letzten Gleichungen, welche die Werthe der Coordinaten x_n, y_n, z_n des Endpunktes N enthalten, in Bezug auf jene Unbekannten aufzulösen und dann damit wie in den vorhergehenden Fällen die Rechnung von vorn anzufangen. Die Umständlichkeit dieser Berechnung wird einleuchten, wenn man beachtet, daß die Spannungen immer durch Quadratwurzeln aus der Summe dreier Quadrate erhalten werden, wodurch sich in den drei letzten Gleichungen die Quadratwurzeln in der Art häufen, daß selbst in einfachen Fällen von einer algebraischen Auflösung keine Rede sein kann.

Wenn zwischen den beiden festen Punkten A und C, Fig. 12, nur ein Knotenpunkt B und eine äußere Kraft P vorhanden ist, so ist durch die Seitenlängen AB und BC die mögliche Gestalt des Polygons bestimmt, seine Lage durch die Ebene, welche durch die Punkte A und C parallel zur Richtung der Kraft P gelegt werden kann. Damit aber beide Seiten gespannt sein können, muß die verlängerte Richtung von P offenbar in den Winkel ABC fallen; die Größe von P ist dagegen ohne Einfluß auf die Gestalt des Polygons, sie bedingt nur die Span-

nungen der Seiten AB und BC, also auch den Widerstand, den die festen Punkte A und C zu leisten haben. Die weitere Ausführung hat keine Schwierigkeit.

Betrachten wir nach diesem, um die vorausgehende Erörterung weiter auszuführen, noch den Fall, wo zwischen den festen Punkten A und D, Fig. 13, zwei Knotenpunkte B und C sich befinden. Seien T_x, T_y, T_z die Componenten der Spannung T_1, also $T_1 = \sqrt{T_x^2 + T_y^2 + T_z^2}$,

$$cos\, a_1 = \frac{T_x}{T_1} \quad , \quad cos\, b_1 = \frac{T_y}{T_1} \quad , \quad cos\, c_1 = \frac{T_z}{T_1} \; ;$$

so hat man zuerst für den Punkt B die Coordinaten

$$x_1 = x_0 + l_1 \frac{T_x}{T_1} \quad , \quad y_1 = y_0 + l_1 \frac{T_y}{T_1} \quad , \quad z_1 = z_0 + l_1 \frac{T_z}{T_1} \; ;$$

die Componenten der Spannung T_2 der Seite BC sind

$$T_x - P_1\, cos\, \alpha_1 \quad , \quad T_y - P_1\, cos\, \beta_1 \quad , \quad T_z - P_1\, cos\, \gamma_1 \; ;$$

also wird T_2 selbst durch

$$\sqrt{(T_x - P_1\, cos\, \alpha_1)^2 + (T_y - P_1\, cos\, \beta_1)^2 + (T_z - P_1\, cos\, \gamma_1)^2}$$

ausgedrückt und die Richtungswinkel der Seite BC werden durch

$$cos\, a_2 = \frac{T_x - P_1\, cos\, \alpha_1}{T_1} \quad , \quad cos\, b_2 = \frac{T_y - P_1\, cos\, \beta_1}{T_1} \; ,$$

$$cos\, c_2 = \frac{T_z - P_1\, cos\, \gamma_1}{T_1} \; ;$$

bestimmt; man hat demnach

$$\left\{ \begin{aligned} x_2 &= x_0 + l_1 \frac{T_x}{T_1} + l_2 \frac{T_x - P_1\, cos\, \alpha_1}{T_2} \, , \\ y_2 &= y_0 + l_1 \frac{T_y}{T_1} + l_2 \frac{T_y - P_1\, cos\, \beta_1}{T_2} \, , \\ z_2 &= z_0 + l_1 \frac{T_z}{T_1} + l_2 \frac{T_z - P_1\, cos\, \gamma_1}{T_2} \, . \end{aligned} \right.$$

Für die Spannung T_3 der Seite CD hat man ferner die Componenten:

$$T_x - P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2 \quad , \quad T_y - P_1 \cos\beta_1 - P_2 \cos\beta_2 \, ,$$

$$T_z - P_1 \cos\gamma_1 - P_2 \cos\gamma_2 \, ,$$

und demnach für die gegebenen Coordinaten x_3, y_3, z_3 des festen Punktes D die Werthe:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= x_0 + l_1 \frac{T_x}{T_1} + l_2 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1}{T_2} + l_3 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2}{T_3} \\ y_3 &= y_0 + l_1 \frac{T_y}{T_1} + l_2 \frac{T_y - P_1 \cos\beta_1}{T_2} + l_3 \frac{T_y - P_1 \cos\beta_1 - P_2 \cos\beta_2}{T_3} \\ z_3 &= z_0 + l_1 \frac{T_z}{T_1} + l_2 \frac{T_z - P_1 \cos\gamma_1}{T_2} + l_3 \frac{T_z - P_1 \cos\gamma_1 - P_2 \cos\gamma_2}{T_3} \end{aligned}\right\} , \quad (f.$$

worin T_1, T_2 und T_3 durch die entsprechenden Wurzelgrößen ersetzt werden müßten, um diese Gleichungen direct nach T_x, T_y, T_z auflösen zu können. Diese Auflösung kann aber, wie man darnach leicht einsehen wird, auch unter den einfachsten Voraussetzungen nur auf dem Wege des Probirens erhalten werden, indem man für T_x, T_y, T_z naheliegende Werthe wählt, damit zuerst die Spannungen T_1, T_2, T_3 und dann die Coordinaten x_3, y_3, z_3 berechnet, und aus den Unterschieden zwischen diesen Ergebnissen und den für diese Coordinaten gegebenen Werthen auf genauere Werthe für T_x, T_y, T_z schließt.

Man kann übrigens den Gleichungen (f) dadurch eine etwas einfachere Form geben, daß man eine der Coordinatenachsen, z. B. die der x durch die beiden festen Punkte legt, und den einen, z. B. A als Anfang der Coordinaten nimmt, und dann noch eine der Coordinaten-Ebenen, z. B. die der xy parallel zur Richtung einer der äußern Kräfte z. B. der Kraft P_1 annimmt. Es wird dadurch $x_0 = y_0 = z_0 = y_3 = z_3 = 0$, und $\gamma_1 = \frac{1}{2}\pi$; es nehmen also die Gleichungen (f) die Form an:

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= l_1 \frac{T_x}{T_1} + l_2 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1}{T_2} + l_3 \frac{T_x - P_1 \cos\alpha_1 - P_2 \cos\alpha_2}{T_3} \\ 0 &= l_1 \frac{T_y}{T_1} + l_2 \frac{T_y - P_1 \sin\alpha_1}{T_2} + l_3 \frac{T_y - P_1 \sin\alpha_1 - P_2 \cos\beta_2}{T_3} \\ 0 &= l_1 \frac{T_z}{T_1} + l_2 \frac{T_z}{T_2} + l_3 \frac{T_z - P_2 \cos\gamma_2}{T_3} \end{aligned}\right\} , \quad (g.$$

und die dritte derselben zeigt, daß wenn auch P_2 zur Ebene der xy parallel und $\cos\gamma_2 = 0$ wird, auch T_z Null ist, daß also das ganze Polygon in diese Ebene fällt, eine Folgerung, welche sich darnach leicht auf ein Polygon mit einer beliebigen Anzahl von äußern Kräften, welche alle zu denselben Ebenen parallel sind, ausdehnen läßt.

Nehmen wir also diesen einfacheren Fall an, und setzen wir um für unsere Berechnung ein Beispiel durchzuführen, $x_3 = 10^m$, $l_1 = 3^m$, $l_2 = 5^m$, $l_3 = 8^m$, so daß, wie es nothwendig sein muß, $l_1 + l_2 + l_3 > x_3$ ist; ferner sei $P_1 = 12^{Kgr}$, $P_2 = 7^{Kgr}$, und $\alpha_1 = 120^0$, $\alpha_2 = 45^0$, was im jetzigen Falle für die Bestimmung der Richtungen dieser Kräfte genügend ist. Man hat damit die Werthe $P_1 \cos\alpha_1 = -6{,}000$, $P_1 \cos\beta_1 = P_1 \sin\alpha_1 = +10{,}392$, $P_2 \cos\alpha_2 = P_2 \cos\beta_2 = 4{,}950$, und die beiden ersten der Gleichungen (g) werden

$$\text{h.)}\left\{\begin{aligned} 0 &= 1 - 0{,}3\,\frac{T_x}{T_1} - 0{,}5\,\frac{T_x + 6{,}000}{T_2} - 0{,}8\,\frac{T_x + 6{,}000 - 4{,}950}{T_3}\,, \\ 0 &= \quad 0{,}3\,\frac{T_y}{T_1} + 0{,}5\,\frac{T_y - 10{,}392}{T_2} + 0{,}8\,\frac{T_y - 10{,}392 - 4{,}950}{T_3}\,. \end{aligned}\right.$$

Als erste Annäherung können wir die Spannung T_1 nahe gleich der Hälfte der Resultirenden der Kräfte P_1 und P_2 annehmen, also nahe

$$T_x = \tfrac{1}{2}(6{,}000 + 4{,}95) = -0{,}525\,,$$
$$T_y = \tfrac{1}{2}(10{,}392 + 4{,}95) = +7{,}671\,,$$

wofür wir $T_x = 0$, $T_y = 8$ setzen wollen; es wird dann $T_1 = 8$,

$$T_2 = \sqrt{6^2 + (2{,}392)^2} = 6{,}459$$

$$T_3 = \sqrt{(1{,}05)^2 + (7{,}342)^2} = 7{,}417\,.$$

und für die rechten Seiten der obigen Gleichungen, welche wir mit u_x und u_y bezeichnen wollen, ergeben sich die Werthe:

$$u_x = 1 - 0{,}464 - 0{,}113 = 0{,}423\,,$$
$$u_y = 0{,}300 - 0{,}185 - 0{,}792 = -0{,}677\,,$$

welche zeigen, daß sowohl T_x als T_y zu klein ist. Nehmen wir daher $T_x = 1$, $T_y = 11$, so ergibt sich

$$T_1 = \sqrt{122} \ , \quad T_2 = \sqrt{7^2 + (0{,}608)^2} \ , \quad T_3 = \sqrt{(2{,}05)^2 + (4{,}342)^2} \ ,$$

$$u_x = 1 - 0{,}027 - 0{,}498 - 0{,}342 = 0{,}133 \ ,$$

$$u_y = 0{,}300 + 0{,}043 - 0{,}726 = -\ 0{,}383 \ ,$$

es bleibe daher $T_x = 1$, für T_y aber setze ich den Werth 13 ein, und erhalte

$$u_x = 1 - 0{,}023 - 0{,}469 - 0{,}527 = -\ 0{,}019 \ ,$$

$$u_y = 0{,}300 + 0{,}175 - 0{,}602 = -\ 0{,}127 \ .$$

Der Werth von u_x hat nun das Zeichen gewechselt, der von u_y noch nicht; es muß demnach $T_x < 1$, $T_y > 13$ genommen werden. Um nun aber sicher zu gehen und diese Werthe in engere Grenzen einschließen zu können, müssen die Werthe von u_x und u_y für mehrere aufeinanderfolgende Werthe von T_x und T_y berechnet werden; man kann sich dazu die Veränderlichen u_x und u_y als die denselben Werthen von x und y entsprechenden dritten Ordinaten z_1 und z_2 zweier Flächen denken, deren Durchschnittslinie die Ebene der xy in einem Punkte trifft, dessen Coordinaten die gesuchten Werthe von T_x und T_y sind, und welcher nach dem Vorhergehenden zwischen $T_x = 0{,}5$ und $T_x = 1{,}0$, und zwischen $T_y = 13$ und $T_y = 14$ liegen dürfte. Seine genauere Lage wird sich ergeben, wenn wir die beiden Flächen in der Nähe dieses Punktes durch Ebenen, die zur Ebene der xz parallel sind, deren Gleichungen also die Form haben:

$$x \text{ oder } T_x = a$$

schneiden und die Formen der beiden Schnittcurven und die Coordinaten ihres Durchschnittspunktes annähernd bestimmen, d. h. für mehrere Punkte derselben die Ordinate T_y annehmen und darnach die zugehörigen dritten Ordinaten u_x und u_y berechnen. Auf diese Weise ergibt sich zuerst folgende Tabelle:

Für $T_x = 0{,}4$,	$T_y = 13{,}3$,	wird $u_x = +\ 0{,}0726$,	$u_y = -\ 0{,}1456$,
„ „	„ $= 13{,}6$	„ „ $= +\ 0{,}0324$	„ $= -\ 0{,}0909$,
„ „	„ $= 13{,}9$	„ „ $= -\ 0{,}0144$	„ $= -\ 0{,}0239$,
„ „	„ $= 14{,}2$	„ „ $= -\ 0{,}0666$	„ $= +\ 0{,}0606$.

daraus folgt, daß die beiden Schnittcurven für $T_x = 0{,}4$ sich nahe bei $T_y = 13{,}9$ schneiden, und zwar hat man zur nähern Bestimmung die Proportion:

$$\Delta T_y : 0{,}3 - \Delta T_y = 0{,}0239 - 0{,}0144 : 0{,}0606 + 0{,}0666 \quad ,$$

woraus mit einstweilen hinreichender Genauigkeit $\Delta T_y = 0{,}02$, $T_y = 13{,}92$ folgt, und sich gemäß proportionaler Aenderung $u_x = u_y = -0{,}0180$ berechnet.

Ferner findet man für $T_x = 0{,}5$ und die gleichen Werthe von T_y wie vorher folgende Werthe für u_x und u_y:

Für $T_x = 0{,}5$, $T_y = 13{,}3$ wird $u_x = +0{,}0486$, $u_y = -0{,}1332$,
" " $= 13{,}6$ " $= +0{,}0086$ " $= -0{,}0766$,
" " $= 13{,}9$ " $= -0{,}0365$ " $= -0{,}0076$,
" " $= 14{,}2$ " $= -0{,}0861$ " $= +0{,}0780$.

Der Durchschnittspunkt der beiden jetzigen Schnittcurven liegt also noch unter der Ebene der xy und zwar zwischen $T_y = 13{,}6$ und $T_y = 13{,}9$; annähernd hat man wieder von 13,6 an

$$\Delta T_y : 0{,}3 - \Delta T_y = 0{,}0086 + 0{,}0766 : 0{,}0365 - 0{,}0076 \quad ,$$

also

$$\Delta T_y = 0{,}22 \quad , \quad T_y = 13{,}82 \quad , \quad u_x = u_y = -0{,}0252 \ .$$

Vergleicht man diese Ergebnisse mit den vorhergehenden, so wird man leicht daraus schließen, daß man T_x noch kleiner nehmen muß, als 0,4 und daß es genügt mit den Werthen 13,9 und 14,2 für T_y zu rechnen; man findet

für $T_x = 0{,}2$, $T_y = 13{,}9$ die Werthe $u_x = +0{,}0365$, $u_y = -0{,}0583$,
" " $= 14{,}2$ " $= -0{,}0209$ " $= +0{,}0221$,

und schließt daraus für den Durchschnittspunkt der entsprechenden Schnittcurven

$$T_x = 0{,}2 \quad , \quad T_y = 14{,}106 \quad , \quad u_x = u_y = -0{,}0030 \ .$$

Stellen wir diesen Werth mit denen der vorhergehenden Durchschnittspunkte zusammen, so ergibt sich die Tabelle

$T_x = 0{,}5$, $T_y = 13{,}82$, $u_x = u_y = -0{,}0252$,
" $= 0{,}4$ " $= 13{,}92$ " " $= -0{,}0180$,
" $= 0{,}2$ " $= 14{,}11$ " " $= -0{,}0030$,

und daraus der Schluß, daß die Durchschnittscurve unserer beiden Flächen die Ebene der xy im Sinne der positiven z und der positiven y, aber im Sinne der negativen x durchschneidet. Wir müssen demnach für T_x auf den Werth 0,0 zurück- und für T_y über den Werth 14,2 hinausgehen;

für $T_x = 0$, $T_y = 14{,}2$ wird $u_x = +0{,}0363$, $u_y = -0{,}0210$,
" " $= 14{,}5$ " $= -0{,}0367$ " $= +0{,}0820$.

Der Durchschnitt der entsprechenden Schnittcurven hat demnach nahezu die Coordinaten:

$$T_x = 0 \; ; \quad T_y = 14{,}3 \; ; \quad u_x = u_y = +0{,}0125 \; ,$$

von denen die letzte zeigt, daß dieser Punkt der Schnittcurve der durch die Gleichungen (h) vorgestellten Flächen über der Ebene der xy liegt, daß also jene Curve diese Ebene zwischen den Punkten $T_x = 0{,}0$, $T_y = 14{,}3$ und $T_x = 0{,}2$, $T_y = 14{,}11$ durchbringt. Betrachten wir die Projection der genannten Schnittcurve zwischen diesen beiden Punkten als eine Gerade, so lassen sich die Coordinaten des Durchgangspunktes in der Ebene der xy wie folgt annähernd bestimmen. Die Länge dieser Geraden ist $\sqrt{(0{,}2)^2 + (14{,}3 - 14{,}11)^2} = 0{,}0276$ und wird durch den gesuchten Durchgangspunkt im Verhältniß

$$0{,}0030 : 0{,}0125$$

getheilt; der erste Theil ist demnach $\frac{30}{155}$ oder $\frac{6}{31}$ oder nahe $\frac{1}{5}$ dieser Länge, und es sind darnach auch die Coordinaten $T_x = 0{,}2$, $T_y = 14{,}11$ um $\frac{1}{5}$ der Unterschiede $0{,}2 - 0$ und $14{,}3 - 14{,}11$ zu ändern, wodurch sich für den Durchgangspunkt die angenäherten Werthe:

$$T_x = 0{,}16 \; , \quad T_y = 14{,}15$$

ergeben. Führen wir nun diese in die Gleichungen (h) ein, so folgt

$$u_x = 1 - 0{,}00339 - 0{,}42685 - 0{,}56901 = -0{,}00915 \; ,$$
$$u_y = 0{,}29998 + 0{,}26041 - 0{,}56144 = -0{,}00105 \; ,$$

für $T_x = 0{,}16$ und $T_y = 14{,}2$ dagegen erhält man

$$u_x = 1 - 0{,}00338 - 0{,}42529 - 0{,}58180 = -0{,}01047 \; ,$$
$$u_y = 0{,}29998 + 0{,}26291 - 0{,}54910 = +0{,}01379 \; ,$$

und zieht daraus für den Durchschnittspunkt der dem Werthe $T_x = 0{,}16$ entsprechenden Schnittcurven die Coordinaten:

$$T_x = 0{,}16 \quad , \quad T_y = 14{,}152 \quad , \quad u_x = u_y = -0{,}00052 \; .$$

Vergleicht man diese mit den Coordinaten $T_x = 0$, $T_y = 14{,}3$, $u_x = u_y = +0{,}0125$, so ergeben sich als genauere Werthe $T_x = 0{,}155$, $T_y = 14{,}158$, und wenn wir uns mit dieser Annäherung begnügen, so finden wir [illegible] für die Spannungen der drei Seiten die Werthe:

$$T_1 = 14\overset{\text{Kgr}}{,}159 \quad , \quad T_2 = 7\overset{\text{Kgr}}{,}216 \quad , \quad T_3 = 1\overset{\text{Kgr}}{,}689 \; ;$$

die Richtungswinkel dieser Seiten sind

$$a_1 = arc\cos\frac{0{,}155}{14{,}159} = arc\sin\frac{14{,}158}{14{,}159} = 89^0\,22',4 \; ,$$
$$a_2 = arc\cos\frac{6{,}155}{7{,}216} = arc\sin\frac{3{,}766}{7{,}216} = 31^0\,27',6 \; ,$$
$$a_3 = arc\cos\frac{1{,}205}{1{,}689} = arc\sin - \frac{1{,}184}{1{,}689} = -44^0\,29',7 \; ,$$

und für die Coordinaten ihrer Eckpunkte findet man

$$x_1 = 0{,}0328 \quad , \quad x_2 = 0{,}0328 + 4{,}2650 = 4{,}2978 \; ,$$
$$y_1 = 2{,}9998 \quad , \quad y_2 = 2{,}9998 + 2{,}6096 = 5{,}6094 \; ,$$

$$x_3 = 4{,}2978 + 5{,}7065 = 10{,}0043 \; ,$$
$$y_3 = 5{,}6094 - 5{,}6070 = +\;0{,}0024 \; .$$

In Fig. 13 ist dieses Polygon nach den eben berechneten Größen vorgestellt.

§. 49.

Wenn die Richtungen der äußern Kräfte P_1, P_2, etc., P_{n-1}, also aller mit Ausnahme von P_0 und P_n parallel sind, so lassen sich die in §. 47 abgeleiteten allgemeinen Gleichungen durch eine entsprechende Wahl des Coordinatensystems wesentlich vereinfachen. Nehmen wir nämlich eine der Coordinatenachsen, z. B. die der z parallel zu der Richtung jener Kräfte P_1, P_2 u. s. f., so hat man $\alpha_1 = \alpha_2 =$ etc. $= \alpha_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$, ebenso $\beta_1 = \beta_2 =$ etc. $= \beta_{n-1} = \frac{1}{2}\pi$ und kann $\gamma_1 = \gamma_2 =$ etc. $= \gamma_{n-1} = 0$ setzen, indem man für diejenigen Kräfte, für welche $\gamma = \pi$ werden soll, den Werth von P negativ nimmt; die Bedingungen (a) für das äußere Gleichgewicht werden dadurch

$$\left.\begin{array}{l} P_0 \cos\alpha_0 + P_n \cos\alpha_n = 0 \\ P_0 \cos\beta_0 + P_n \cos\beta_n = 0 \\ P_0 \cos\gamma_0 + P_n \cos\gamma_n + P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{n-1} = 0 \end{array}\right\}.$$

Die beiden ersten sprechen aus, daß die zur Achse der z senkrechten Componenten der beiden Kräfte P_0 und P_n einander gleich und direct entgegengesetzt sein müssen, daß also diese Kräfte selbst in einer zur z-Achse parallelen Ebene liegen müssen, und die dritte bedingt, daß die Summe der zur z-Achse parallelen Componenten dieser Kräfte der Summe oder Resultirenden aller parallelen Kräfte P_1 bis P_{n-1} gleich und im entgegengesetzten Sinne gerichtet sein muß.

Die Gleichungen (b) oder (c), welche die Componenten der Spannung T_i einer beliebigen Seite durch die vor oder nach dieser Seite angreifenden Kräfte ausdrücken, gehen über in

$$\left.\begin{array}{l} -T_i \cos a_i = P_0 \cos\alpha_0 \quad , \quad -T_i \cos b_i = P_0 \cos\beta_0 \\ \qquad -T_i \cos c_i = P_0 \cos\gamma_0 + \sum_{h=1}^{h=i-1} . P_h \end{array}\right\},$$

und

$$\left.\begin{array}{l} T_i \cos a_i = P_n \cos\alpha_n \quad , \quad T_i \cos b_i = P_n \cos\beta_n \\ \qquad T_i \cos c_i = P_n \cos\gamma_n + \sum_{h=i}^{h=n} . P_h \end{array}\right\}$$

oder wenn man die Ebene der Kräfte P_0 und P_n als Ebene der xz annimmt, wodurch $\beta_0 = \beta_n = \frac{1}{2}\pi$, $\gamma_0 = \frac{1}{2}\pi - \alpha_0$, $\gamma_n = \frac{1}{2}\pi - \alpha_n$ wird,

$$\left\{\begin{array}{l} -T_i \cos a_i = P_0 \cos \alpha_0 = -P_n \cos \alpha_n \quad , \qquad -T_i \cos b_i = 0 \\ -T_i \cos c_i = P_0 \sin \alpha_0 + P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{i-1} \\ \qquad\qquad = -P_n \sin \alpha_n - P_i - P_{i+1} - \text{etc.} - P_{n-1} \; . \end{array}\right.$$

Aus der zweiten folgt, daß auch alle b Null sind, daß also das ganze Polygon in der Ebene der Kräfte P_0 und P_n liegt, und $\cos c_i = \sin a_i$ ist. Die erste und dritte der vorstehenden Gleichungen geben daher die Beziehungen:

$$\left\{\begin{array}{l} \tan g\, a_i = \tan g\, a_n + \dfrac{P_i + P_{i+1} + \text{etc.} + P_{n-1}}{P_n \cos \alpha_n} \, , \\ \text{oder} \\ \tan g\, (\pi + a_i) = \tan g\, \alpha_0 + \dfrac{P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{i-1}}{P_0 \cos \alpha_0} \, , \end{array}\right.$$

durch welche sich die Richtungswinkel der einzelnen Seiten des Polygons leicht berechnen lassen, wenn P_0 und α_0 oder P_n und α_n gegeben sind. Die Berechnung der Coordinaten der einzelnen Knotenpunkte erfolgt dann wie im allgemeinen Falle.

Man schließt aus den vorhergehenden Gleichungen ferner noch, daß die zur z-Achse senkrechte Componente der Spannung für alle Seiten gleich groß ist, und daß der Unterschied zwischen den zu dieser Achse parallelen Componenten der Spannungen zweier Seiten der Summe der äußern Kräfte gleich ist, welche zwischen diesen beiden Seiten angreifen. Enthält daher das Polygon eine Seite, welche zur Richtung der Kräfte (der z-Achse) senkrecht ist, für welche demnach die zu dieser Richtung parallele Componente $T_i \sin \alpha_i$ der Spannung Null wird, so hat man

$$P_0 \sin \alpha_0 = -(P_1 + P_2 + \text{etc.} + P_{i-1}) \; ,$$
$$P_n \sin \alpha_n = -(P_i + P_{i+1} + \text{etc.} + P_{n-1}) \; ;$$

in diesem Falle ist also die zur z-Achse parallele Componente der an einem Ende des Polygons angreifenden Kraft der Resultirenden oder Summe aller Kräfte gleich, welche zwischen jener senkrechten Seite und dem betreffenden Ende des Polygons angreifen.

Wenn die beiden Endpunkte A und N des Fadens fest sind, so liegt das Polygon offenbar in der Ebene, welche die beiden festen

Punkte enthält und zur Richtung der Kräfte P_1, P_2 u. s. f. parallel ist; im übrigen gilt für den Widerstand, welchen diese Punkte zu leisten haben, dasselbe, was vorher von den Kräften P_0 und P_n gesagt wurde, und die Berechnung der Componenten eines dieser Widerstände von welcher die Bestimmung der Form des Polygons abhängt, bietet noch dieselben Schwierigkeiten, wie in dem Falle, welchen wir im vorigen Paragraphen besprochen haben, nämlich in dem, wo alle Kräfte zu einer und derselben Ebene parallel sind, ohne selbst parallel zu sein.

§. 50.

In dem Vorhergehenden wurde vorausgesetzt, daß die Angriffspunkte der äußern Kräfte mit dem Faden fest verbunden und die Längen der Polygonseiten unveränderlich bestimmt seien; betrachten wir daher noch den Fall, wo die Angriffspunkte der Kräfte P sich wie Ringe auf dem Faden ohne Reibung verschieben lassen, also blos die ganze Länge des Fadens gegeben, über die einzelnen Seiten oder Entfernungen jener Angriffspunkte aber nichts bestimmt ist.

Die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht des Systems bleiben natürlich dieselben, wie vorher und werden wieder durch die Gleichungen (a) in §. 47 ausgesprochen. Für das innere Gleichgewicht wird man leicht einsehen, daß nun die Spannung zweier aufeinander folgenden Seiten gleich sein muß, und daß dieses nur dann statthaben kann, wenn diese Seiten mit der Richtung der zwischen ihnen oder an ihrem Eckpunkte angreifenden äußern Kraft gleiche Winkel einschließen. Man überzeugt sich davon am anschaulichsten, wenn man sich die beiden andern Endpunkte dieser Seiten, z. B. B und D, Fig. 11, fest denkt, wodurch im Gleichgewichte der übrigen Punkte nichts geändert wird; der Eckpunkt C dieser Seiten kann sich dann nur auf der Oberfläche eines Umdrehungs-Ellipsoids bewegen, dessen Brennpunkte die Punkte B und D sind. Der Punkt C kann also nur im Gleichgewichte bleiben, wenn die an ihm angreifende Kraft normal zu dieser Fläche gerichtet ist, also ihre Richtung den Winkel zwischen den beiden Fahrstrahlen BC und CD halbirt, woraus sofort auch die Gleichheit der Spannungen dieser Seiten folgt.

Mit denselben Bezeichnungen wie in der vorhergehenden Untersuchung und wenn man noch den Winkel, welchen die Seite HJ mit der Seite JK, oder l_i mit l_{i+1} einschließt, mit $2\vartheta_i$ bezeichnet, hat man daher

$$\text{a.)}\left\{\begin{array}{l} T_i = \frac{P_i}{2\cos\vartheta_i} = T_{i+1}\ ,\quad T_{i+1} = \frac{P_{i+1}}{2\cos\vartheta_{i+1}} = T_{i+2}\ ,\quad \text{u. s. f.} \\ \text{also} \\ \qquad T_i = T_{i+1} = T_{i+2} = \text{etc.} = T_n = P_n\ , \\ \qquad T_i = T_{i-1} = T_{i-2} = \text{etc.} = T_0 = -P_0\ , \end{array}\right.$$

und daraus folgt abgesehen vom Zeichen

$$P_0 = P_n \quad , \qquad \cos\vartheta_i = \frac{P_i}{2P_0}\ .$$

Für das innere Gleichgewicht müssen also im jetzigen Falle die an beiden Enden des Fadens angreifenden Kräfte gleich und bezüglich des Sinnes, in welchem sie den Faden bewegen wollen, entgegengesetzt sein; eine dieser gleichen Kräfte ist dann auch das Maaß für die in allen Punkten gleiche Spannung des Fadens. Außerdem ist aber auch entweder die Größe oder die Richtung dieser Kräfte P_0 und P_n nicht ganz willkürlich; denn es ist nach dem Vorhergehenden

$$\text{b.)}\left\{\begin{array}{l} \qquad P_1 = 2P_0\cos\vartheta_1\ , \\ \cos\vartheta_1 = \cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1\ ; \\ \text{und} \\ \qquad P_{n-1} = 2P_n\cos\vartheta_{n-1}\ , \\ \cos\vartheta_{n-1} = \cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_n + \cos\beta_{n-1}\cos\beta_n + \cos\gamma_{n-1}\cos\gamma_n\ ; \\ \qquad P_0 = P_n\ . \end{array}\right.$$

Ist also $P_0 = P_n$ der Intensität nach, P_1 und P_{n-1} der Größe und Richtung nach bestimmt, so bedingen die Gleichungen:

$$\text{c.)}\left\{\begin{array}{l} P_1 \ \ \ = 2P_0\,(\cos\alpha_0\cos\alpha_1 + \cos\beta_0\cos\beta_1 + \cos\gamma_0\cos\gamma_1) \\ P_{n-1} = 2P_0\,(\cos\alpha_{n-1}\cos\alpha_n + \cos\beta_{n-1}\cos\beta_n + \cos\gamma_{n-1}\cos\gamma_n) \end{array}\right.$$

in Verbindung mit den Bedingungen:

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \gamma_0^2 = 1 \quad , \qquad \alpha_n^2 + \beta_n^2 + \gamma_n^2 = 1$$

je einen der Winkel α_0, β_0, γ_0 und α_n, β_n, γ_n. Soll dagegen die Richtung von P_0 bestimmt bleiben, womit auch ϑ_1 gegeben ist, so gibt die Gleichung:

$$P_0 = \frac{P_1}{2\cos\vartheta_1}$$

die Größe von P_0 und P_n und es bleibt dann noch die Richtung von P_n nach der von P_{n-1} zu bestimmen.

Dagegen ist es im jetzigen Falle, wenn die beiden Endpunkte des Fadens befestigt sind, möglich, die Spannung und die Richtungswinkel der Seiten direct zu berechnen; denn die Gleichungen (a) in §. 47 werden nun mit den vorhergehenden Bedingungen (a) und wenn T die allen Seiten gemeinschaftliche Spannung bezeichnet,

$$\left.\begin{aligned} T(\cos a_1 - \cos a_n) &= P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\alpha_{n-1} \\ T(\cos b_1 - \cos b_n) &= P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\beta_{n-1} \\ T(\cos c_1 - \cos c_n) &= P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\gamma_{n-1} \end{aligned}\right\} ;(d.$$

die Bedingungen (c) geben ferner

$$\left.\begin{aligned} 2T(\cos a_1 \cos\alpha_1 + \cos b_1 \cos\beta_1 + \cos c_1 \cos\gamma_1) &= P_1 \\ 2T(\cos a_n \cos\alpha_{n-1} + \cos b_n \cos\beta_{n-1} + \cos c_n \cos\gamma_{n-1}) &= P_{n-1} \end{aligned}\right\} (e.$$

und diese fünf Gleichungen reichen in Verbindung mit den beiden Bedingungen:

$$\cos^2 a_1 + \cos^2 b_1 + \cos^2 c_1 = 1 \quad , \quad \cos^2 a_n + \cos^2 b_n + \cos^2 c_n = 1 \quad (f.$$

hin, um die sieben Unbekannten: T, a_1, b_1, c_1, a_n, b_n, c_n zu bestimmen.

Zu diesem Zwecke ersetzt man $T\cos a_1$, $T\cos b_1$, $T\cos c_1$, durch u_1, v_1, w_1, und $T\cos a_n$, $T\cos b_n$, $T\cos c_n$ durch u_n, v_n, w_n, ferner

$P_1 \cos\alpha_1 + P_2 \cos\alpha_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\alpha_{n-1}$ durch X,

$P_1 \cos\beta_1 + P_2 \cos\beta_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\beta_{n-1}$ durch Y,

$P_1 \cos\gamma_1 + P_2 \cos\gamma_2 + \text{etc.} + P_{n-1}\cos\gamma_{n-1}$ durch Z,

und hat dann durch die Gleichungen (d)

$$u_n = u_1 - X \quad , \quad v_n = v_1 - Y \quad , \quad w_n = w_1 - Z \; ; \quad (g.$$

führt man diese Werthe in die zweite der Gleichungen (e) und in die aus den Gleichungen (f) sich ergebende neue Gleichung:

$$u_n^2 + v_n^2 + w_n^2 = u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 = T^2 \quad (h.$$

ein, so erhält man mit der ersten der Gleichungen (c) zur Bestimmung von u_1, v_1 und w_1 folgende drei Gleichungen vom ersten Grade:

$$\begin{cases} 2u_1 \cos\alpha_1 + 2v_1 \cos\beta_1 + 2w_1 \cos\gamma_1 = P_1 , \\ 2u_1 \cos\alpha_{n-1} + 2v_1 \cos\beta_{n-1} + 2w_1 \cos\gamma_{n-1} = P_{n-1} \\ \qquad -2X\cos\alpha_{n-1} - 2Y\cos\beta_{n-1} - 2Z\cos\gamma_{n-1} , \\ 2u_1 X + 2v_1 Y + 2w_1 Z = X^2 + Y^2 + Z^2 , \end{cases}$$

deren Auflösung keine Schwierigkeit hat. Durch die Werthe von u_1, v_1, w_1 und die Gleichungen (g) und (h) ist auch u_n, v_n, w_n und T, also auch die Winkel a_1, b_1, c_1 bekannt, und damit und mit der Beachtung, daß auch hier immer zwei Seiten und die an ihrem gemeinschaftlichen Eckpunkte angreifende Kraft in einer Ebene liegen müssen, können mittels der Gleichungen (a) nach und nach die Richtungswinkel aller Seiten bestimmt werden.

Man ersieht daraus, daß in dem Falle, wo die Angriffspunkte der Kräfte P_1, P_2, u. s. f., auf dem Faden verschiebbar sind, die Spannung und die Richtungswinkel aller Seiten sich ohne Rücksicht auf die Coordinaten der Endpunkte berechnen lassen. In diesem Falle ist aber auch unter der bisherigen Voraussetzung, daß die Richtungen der äußeren Kräfte parallel mit sich beliebig verrückt werden können, und die Punkte, von welchen diese Kräfte ausgehen, außer Berücksichtigung bleiben, die Gestalt des Polygons im Allgemeinen nicht streng bestimmt; denn um die Coordinaten der Eckpunkte mittels der Gleichungen (d) in §. 48 zu berechnen, genügt es offenbar nicht, daß die Richtungen der einzelnen Seiten bekannt sind oder gefunden werden können, es müssen auch die Seiten der Größe nach gegeben sein, während wir im jetzigen Falle nur die Bedingung:

i.) $$l_1 + l_2 + \text{etc.} + l_n = L$$

haben, worin L die Länge des ganzen Fadens bedeutet. Soll also im Allgemeinen die Form des Polygons vollständig bestimmt werden können, so müssen die Richtungslinien der äußern Kräfte in ihrer Lage mehr beschränkt werden; es muß für jede Kraft die Lage einer Ebene gegeben sein, in welcher ihre Richtungslinie bleiben soll, und welche nicht zugleich die zwei anstoßenden Seiten des Polygons enthält. Es dürfte also im Allgemeinen am einfachsten sein, eine zur Achse der z parallele Ebene, welche die Richtung der Kraft enthalten soll, zu geben, oder

was dasselbe ist, einen Punkt in der Richtung der Kraft nur durch die Coordinaten seiner Projection in der Ebene der xy zu bestimmen. Denn bezeichnet man die Coordinaten der Projection eines solchen Punktes in der Richtung der Kraft P_i mit p_i, q_i, und setzt man voraus, daß die Coordinaten x_{i-1}, y_{i-1}, z_{i-1}, bereits bestimmt sind, so ergeben sich die Coordinaten x_i, y_i, z_i als Coordinaten des Durchgangspunktes der Geraden:

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{\cos a_i} = \frac{y_i - y_{i-1}}{\cos b_i} = \frac{z_i - z_{i-1}}{\cos c_i},$$

in der projicirenden Ebene:

$$\frac{x_i - p_i}{\cos \alpha_i} = \frac{y_i - q_i}{\cos \beta_i},$$

wobei vorausgesetzt wird, daß die Richtung der Kraft P_i in dieser projicirenden Ebene parallel mit sich durch jeden Punkt gelegt werden kann.

Diesen Beschränkungen und den vorher genannten Bedingungen für das innere Gleichgewicht eines Fadens mit beweglichen Angriffspunkten der äußern Kräfte ist endlich noch die Bemerkung beizufügen, daß nach der Natur eines vollkommen biegsamen Fadens die Spannung immer nur einen Zug bedeuten, und deßhalb die Richtung der an einem Eckpunkte angreifenden Kraft niemals spitze Winkel mit den anstoßenden Seiten bilden kann. Es kann daher in unserm jetzigen Falle und wenn alle äußern Kräfte bis auf P_0 und P_n parallele Richtungen haben, nur dann Gleichgewicht bestehen, wenn diese Kräfte abwechselnd in entgegengesetztem Sinne wirken, weil es sonst unmöglich ist, die obengenannte Bedingung mit der frühern, daß die Richtung der Kraft P_i den Winkel zwischen den beiden anstoßenden Seiten halbiren muß, zu vereinigen, ausgenommen in dem unerreichbaren Falle, wo der Faden eine gerade Linie bilden soll, die Spannung T also unendlich groß sein müßte.

§. 51.

Das **Knie** besteht, in seiner einfachsten geometrischen Gestalt, als **mathematisches Knie**, aus zwei festen unbiegsamen Geraden AB, BC, Fig. 14, welche einen Punkt gemeinschaftlich haben und sich um diesen ohne Widerstand bewegen, also jeden beliebigen Winkel ABC zwischen sich einschließen können; der Endpunkt A des einen Schenkels

AB ist fest und unverrückbar, der Endpunkt C des andern BC dagegen ist der Beschränkung unterworfen, sich auf der durch A gelegten unbiegsamen und unverrückbaren Geraden AX zu bewegen; an den Punkten B und C greifen äußere Kräfte P und Q an, von denen die erste eine beliebige Richtung haben, die zweite aber längs der Geraden AD gerichtet sein soll.

Dieses veränderliche System befindet sich jedenfalls im Zustande des äußern Gleichgewichtes; fügen wir also zu den vorhergenannten äußern Kräften P und Q noch die Widerstände, welche der Punkt A und die Gerade AD im Punkte C zu leisten haben, so müssen alle diese Kräfte den Bedingungen des äußern Gleichgewichtes genügen und diese Bedingungen werden umgekehrt dazu dienen, die Größe jener Widerstände zu bestimmen. Dazu nehmen wir die Ebene des Systems als Ebene der xy, die Gerade AX als Achse der x, den Punkt A als Anfangspunkt, bezeichnen die Länge der Schenkel AB und BC durch l_1 und l_2, mit α und β die Winkel BAC und BCA, welche sie mit der Geraden AC einschließen, und die unter sich durch die Gleichung:

a.) $$l_1 \sin\alpha = l_2 \sin\beta$$

in Abhängigkeit stehen, stellen den Widerstand der festen Geraden AX im Punkte C durch N_3 vor, und ersetzen den Widerstand des Punktes A durch seine beiden Componenten N_1 und N_2, von denen die eine nach der Geraden AD, die andere senkrecht dazu gerichtet ist.

Damit erhalten wir für das Gleichgewicht der fördernden Wirkungen aller äußern Kräfte die beiden Gleichungen:

b.) $$\left\{\begin{aligned} N_1 + Q + P\cos\widehat{Px} &= 0\,, \\ N_2 + N_3 + P\sin\widehat{Px} &= 0\,, \end{aligned}\right.$$

und als Bedingung für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen in Bezug auf den Punkt A die Gleichung:

c.) $$Pl_1(\cos\alpha\sin\widehat{Px} - \sin\alpha\cos\widehat{Px}) + N_3(l_1\cos\alpha + l_2\cos\beta) = 0\,.$$

Diese drei Gleichungen reichen gerade hin zur Bestimmung der drei Unbekannten N_1, N_2, N_3; sie geben, mit Berücksichtigung der Gleichung (a.)

$$\left.\begin{aligned} N_3 &= -P\frac{\sin(\widehat{Px}-\alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}, \quad N_1 = -(Q+P\cos\widehat{Px}) \\ N_2 &= P\left(\frac{\sin(\widehat{Px}-\alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}-\sin\widehat{Px}\right) = -P\frac{\sin(\widehat{Px}+\beta)\sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \end{aligned}\right\} \text{. (d.}$$

Es bleibt demnach noch die Beziehung zwischen P, Q und einem der Winkel α oder β festzustellen, und dazu dienen die Bedingungen des innern Gleichgewichtes eines jeden der beiden Schenkel AB und BC und ihres Verbindungspunktes B. Die innern Wirkungen, welche die Schenkel AB und BC aufeinander ausüben, können durch zwei Kräfte J_1 und J_2 vorgestellt werden, welche beide in B angreifen, und von denen die eine nach AB, die andere nach BC gerichtet ist und welche die nothwendige Widerstandsfähigkeit dieser Geraden gegen eine Dehnung oder Stauung ausdrücken.

Nehmen wir unserer Figur entsprechend das Erstere an, so haben wir an dem Schenkel AB die Kräfte N_1 und N_2 in A, die Kräfte P und J_2, in B angreifend, an dem Schenkel BC in B die Kräfte P und J_1, in C die Kräfte Q und N_3, und an dem Punkte B, wenn er für sich allein betrachtet wird, die Kräfte P, J_1 und J_2; die Bedingungen für das Gleichgewicht des Schenkels AB sind demnach

$$\left.\begin{aligned} N_1 + P\cos\widehat{Px} + J_2\cos\beta &= 0 \\ N_2 + P\sin\widehat{Px} - J_2\sin\beta &= 0 \\ Pl_1(\cos\alpha\sin\widehat{Px} - \sin\alpha\cos\widehat{Px}) - J_2 l_1(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

und geben, verglichen mit den Gleichungen (b) und (c) nur die Beziehungen:

$$J_2\sin\beta = -N_3 \quad , \quad J_2\cos\beta = Q \quad , \quad J_2 = \sqrt{Q^2+N_3^2} .$$

welche ohnehin einleuchten; ebenso geben die Gleichgewichtsbedingungen für den Schenkel BC, nämlich

$$\left.\begin{aligned} Q + P\cos\widehat{Px} - J_1\cos\alpha = 0 \quad &, \quad N_3 + P\sin\widehat{Px} - J_1\sin\alpha \\ Pl_1\sin(\widehat{Px}-\alpha) + N_3 l_1\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta} &= 0 \end{aligned}\right\} ,$$

nur Bekanntes und die unmittelbar einleuchtenden Gleichungen:

$$N_1 = -J_1 \cos\alpha \quad , \quad N_2 = -J_1 \sin\alpha \quad , \quad J_1 = \sqrt{N_1^2 + N_2^2} ,$$

weil dort die Kräfte J_2 und $\sqrt{Q^2 + N_3^2}$, hier die Kräfte J_1 und $\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ an den Endpunkten einer unveränderlichen Geraden angreifen.

In diesem einfachen Falle genügen demnach die Gleichgewichtsbedingungen des Punktes B; diese sind

$$\begin{cases} P \cos\widehat{Px} - J_1 \cos\alpha + J_2 \cos\beta = 0 \, , \\ P \sin\widehat{Px} - J_1 \sin\alpha - J_2 \sin\beta = 0 \, , \end{cases}$$

und wenn hier die Componenten J_1 und J_2 mittels der vorhergehenden Ergebnisse durch die Widerstände N ausgedrückt und für diese die aus den vorhergehenden Beziehungen (d) folgenden Werthe gesetzt werden, so findet man

$$J_1 = \frac{Q + P \cos\widehat{Px}}{\cos\alpha} \quad , \quad J_2 = \frac{Q}{\cos\beta} \; ;$$

damit wird die erste unmittelbar befriedigt, und die zweite gibt nach einigen Reductionen die gesuchte Bedingung zwischen P und Q, nämlich

$$\text{f.)} \quad P \sin(\widehat{Px} - \alpha) = Q \cos\alpha \, (\operatorname{tang}\alpha + \operatorname{tang}\beta)$$

$$= Q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos\beta}$$

oder die Werthe:

$$P = Q \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\widehat{Px} - \alpha) \cos\beta} \quad , \quad Q = P \frac{\sin(\widehat{Px} - \alpha) \cos\beta}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

Mit diesem können dann auch die Widerstände N_3 und $\sqrt{N_1^2 + N_2^2}$ und die erforderlichen Widerstandsfähigkeiten J_1 und J_2 in Function von Q oder P ausgedrückt werden. Man findet abgesehen von den Zeichen

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = J_1 = Q \frac{\sin(\widehat{Px} + \beta)}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\cos\beta} = P \frac{\sin(\widehat{Px} + \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} ,$$

$$J_2 = \frac{Q}{\cos\beta} = P \frac{\sin(\widehat{Px} - \alpha)}{\sin(\alpha + \beta)} ,$$

$$N_3 = Q \tan\beta = P \frac{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)} .$$

Alle diese Werthe hängen von einem der Winkel α oder β ab, also von der Neigung der Schenkel gegen die feste Gerade AX; sie zeigen zuerst, daß $\widehat{Px}$ nicht gleich α oder gleich $\pi + \alpha$ werden darf, wenn nicht Q Null werden soll; für ein constantes P und $\widehat{Px}$, wächst Q fortwährend, wenn α und β abnehmen, und nimmt für $\alpha = \beta = 0$ den Werth ∞ an; in diesem Falle werden aber auch J_1 und J_2 unendlich groß, und es kann der Werth $Q = \infty$ in der Anwendung nicht erreicht werden, weil es keine Schenkel von unendlich großer Widerstandsfähigkeit gibt.

Die vorhergehenden Gleichungen werden einfacher, wenn $l_1 = l_2$, das Knie also ein gleichschenkliches ist; daraus folgt auch $\alpha = \beta$, und man hat

$$P = Q \frac{\sin 2\alpha}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)\cos\alpha} = Q \frac{2\sin\alpha}{\sin(\widehat{Px} - \alpha)} .$$

Verfügt man dann noch über die Richtung von P entweder so, daß P immer senkrecht zu AX, oder immer senkrecht zu AB ist, so hat man im ersten Falle

$$\widehat{Px} = \tfrac{1}{2}\pi \quad , \quad P_1 = 2Q \tan\alpha ;$$

im zweiten dagegen wird

$$\widehat{Px} = \tfrac{1}{2}\pi + \alpha \quad , \quad P_2 = 2Q \sin\alpha ;$$

es kann daher im letzten Falle für ein gleiches Q immer P kleiner sein, als im ersten, oder umgekehrt ein gleiches P hält im zweiten Falle und bei gleicher Neigung der Schenkel immer einem größeren Q das Gleichgewicht, und es ist leicht zu sehen, daß für ein gleichschenkliches Knie

und ein beliebiges α der Werth von P_2 überhaupt der kleinste, die entsprechende Richtung dieser Kraft also die vortheilhafteste ist. Der Unterschied zwischen den Werthen von P_1 und P_2 wird übrigens nur für größere Werthe von α fühlbar, wie folgende Tabelle zeigt:

Für $\alpha = 45^0$	wird $P_1 = 2{,}000\ Q$,	$P_2 = 1{,}414\ Q$,
„ $= 30^0$	„ $= 1{,}155\ Q$,	„ $= 1{,}000\ Q$,
„ $= 15^0$	„ $= 0{,}536\ Q$,	„ $= 0{,}518\ Q$,
„ $= 10^0$	„ $= 0{,}353\ Q$,	„ $= 0{,}347\ Q$,
„ $= 5^0$	„ $= 0{,}175\ Q$,	„ $= 0{,}174\ Q$.

In dem ersten dieser einfachen Fälle hat man ferner für die Kräfte N und J die Werthe:

$$\sqrt{N_1^2 + N_2^2} = J_1 = J_2 = Q\, sec\, \alpha = \frac{P}{2\, sin\, \alpha} ,$$

$$N_3 = N_1 = Q\, tang\, \alpha = \tfrac{1}{2} P ;$$

im zweiten wird

$$J_1 = Q \frac{cos\, 2\alpha}{cos\, \alpha} = P\, cot\, 2\alpha ,$$

$$J_2 = Q\, sec\, \alpha = P \frac{1}{sin\, 2\alpha} , \quad N_3 = Q\, tang\, \alpha = \frac{1}{2} P\, sec\, \alpha .$$

Die vorhergehenden Beziehungen wurden insbesondere unter der Voraussetzung abgeleitet, daß die Kraft Q im Sinne der positiven x wirke oder einen Zug auf das Knie ausübe; es ist aber leicht zu sehen, daß diese Gleichungen und Bedingungen mit gehöriger Rücksicht auf die Zeichen auch für den gewöhnlich stattfindenden Fall, wo Q einen Druck vorstellt oder von C gegen A wirkt, gültig sind, namentlich daß die Beziehung zwischen P und Q unverändert bleibt; da nun auch P das Zeichen wechselt oder der Winkel $\widehat{Px}$ um π größer wird.

Wenn übrigens die Kraft P nicht unmittelbar in B angreift, sondern statt ihrer eine Kraft P' an irgend einem Punkte O, welcher mit dem Schenkel AB fest verbunden ist, und dessen Polar-Coordinaten in Bezug auf A und AB mit r und ϑ bezeichnet seien, so ist aus den Bedingungsgleichungen für das Gleichgewicht dieses Schenkels leicht zu schließen, insbesondere aus der Bedingung für das Gleichgewicht der

brechenden Wirkungen, daß die Momente der Kräfte P und P' in Bezug auf A gleich sein müssen, daß man also

$$P l_1 \sin(\widehat{Px} - \alpha) = P' r \sin(\widehat{P'x} - \alpha - \vartheta)$$

hat und demnach nur in der allgemeinen Beziehung (f) zwischen P und Q sowie in den darauffolgenden Werthen für die Kräfte N und J den Ausdruck $P' \frac{r}{l_1} \sin(\widehat{P'x} - \alpha - \vartheta)$ statt $P \sin(\widehat{Px} - \alpha)$ setzen muß, so daß jene nun den Werth gibt:

$$Q = P' \frac{r \sin(\widehat{P'x} - \alpha - \vartheta) \cos\beta}{l_1 \sin(\alpha + \beta)} .$$

In diesem Ausdruck wird man in dem Product $r \sin(\widehat{P'x} - \alpha - \vartheta)$ die Länge der von A auf die Richtung von P', in $l_1 \sin(\alpha + \beta)$ die Länge der von A auf BC gefällten Senkrechten erkennen; ferner ist $\frac{Q}{\cos\beta}$ die Intensität der in der Richtung BC wirkenden Kraft $J_2 = \sqrt{Q^2 + N_2^2}$; bezeichnet man demnach die genannten Senkrechten mit p' und i, so wird einfach

$$P'p' = J_2 i \quad , \qquad P'p' \cos\beta = Q i$$

die Bedingung für das Gleichgewicht unseres Systems.

Für das gleichschenkliche Knie, Fig. 15, wird

$$\frac{i}{\cos\beta} = \frac{AE}{\cos\alpha} = AF = 2BD = 2f ;$$

wenn man daher die Ordinate BD = f den Pfeil des Knies nennt, so kann man die Gleichung:

$$P'p' = 2Qf$$

dahin aussprechen: Bei dem gleichschenklichen Knie verhält sich die Kraft P' zu dem durch das Knie ausgeübten Zug oder Druck Q, wie der doppelte Pfeil zu dem Hebelarm des Momentes der Kraft P'. Die in der Figur angedeutete Construction wird darnach keiner weitern Erklärung bedürfen.

In der Maschinenlehre werde ich auf dieses wichtige Maschinen-Element zurückkommen und dort soll dann auch die Reibung berücksichtigt werden.

§. 52.

Als ein weiteres Beispiel für das innere Gleichgewicht eines veränderlichen Systems, welches aus festen Theilen zusammengesetzt ist, betrachte ich noch die Roberval'sche Wage, theils weil sie am besten zeigt; wie nothwendig es für eine klare Behandlung und Anschauung der Verhältnisse bei veränderlichen Systemen ist, zwischen innerem und äußerem Gleichgewicht zu unterscheiden, theils weil dieselbe ein technisch wichtiges Princip darstellt, welches in der neuern Zeit sowohl für gleichwägende, als für Dezimal-Wagen Anwendung gefunden hat, und welches noch einer strengen Begründung durch Zurückführung auf die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen entbehrt.

Auf ihre geometrische Gestalt zurückgeführt, besteht die Roberval'sche Wage aus vier je zwei gleichen unbiegsamen Geraden, welche zu einem veränderlichen Parallelogramm CDEF, Fig. 16, verbunden, und von denen zwei gegenüberliegende Seiten CD und EF in ihren Mittelpunkten A und B in einer Vertikalen so befestigt sind, daß sich das Parallelogramm in seiner Ebene um diese Punkte ohne Widerstand drehen läßt; an diesem System greifen zwei parallele Kräfte P und Q an, welche im Sinne der Schwere wirken, und deren Angriffspunkte G und H mit den vertikalen Seiten CE und DF auf irgend eine Weise fest verbunden sind, gewöhnlich mittels unbiegsamer, zu CE und DE senkrechter Geraden, auf welchen sich die Angriffspunkte G und H verschieben lassen *).

Um indessen das betreffende Princip sogleich allgemeiner aufzufassen, will ich annehmen, daß die festen Punkte A und B die Seiten CD und EF, Fig. 17, auf gleiche aber beliebige Weise theilen, so daß zwei ungleiche Parallelogramme ACBE und BFDA gebildet werden, und sich verhält

$$CA : AD = EB : BF = m : n ,$$

---

*) Man hat es früher für eine Ausnahme vom Gesetze des Hebels angesehen, daß an dieser Wage Gleichgewicht stattfindet, wenn $P = Q$ ist, ohne Rücksicht auf die Entfernung der Angriffspunkte G und H von der Vertikalen AB. Die erste richtige Erklärung davon scheint Poinsot gegeben zu haben in seinen Élémens de statique.

und daß die Kräfte P und Q in der Ebene des Parallelogrammes beliebige Richtungen haben; auch wollen wir für jetzt alle Geraden als gewichtlos voraussetzen.

Die Ebene der Figur sei die der x z, die Gerade AB die Achse der positiven z und A der Anfangspunkt; die Länge der Seiten CD und EF sei l_1, die der Seiten CE und DF oder der Abstand der festen Punkte B und A sei l_2; die Entfernungen GK und LH der Angriffspunkte G und H von den Seiten CE und DF bezeichnen wir mit a_1 und a_2, die Abstände CK und DL dieser Senkrechten von C und D mit c_1 und c_2, und mit α den Winkel, den die Seite CD mit der x = Achse einschließt; endlich sollen N_1 und N_2 die Widerstände vorstellen, welche die Punkte A und B zu leisten haben und ω_1, ω_2 die Winkel ihrer Richtungen mit der Achse der x. Demnach sind die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht des Systems und zwar für das Gleichgewicht der fördernden Wirkungen

$$\left.\begin{array}{l} P\cos\widehat{Px} + Q\cos\widehat{Qx} + N_1\cos\omega_1 + N_2\cos\omega_2 = 0 \\ P\sin\widehat{Px} + Q\sin\widehat{Qx} + N_1\sin\omega_1 + N_2\sin\omega_2 = 0 \end{array}\right\} . \quad (a.$$

Um die Bedingungen für das Gleichgewicht der drehenden Wirkungen aufzustellen, haben wir zuerst die Coordinaten der Angriffspunkte G und H zu bestimmen; diese, mit x_1, y_1 für P, mit x_2, y_2 für Q bezeichnet, sind:

$$x_1 = \frac{m}{m+n} l_1 \cos\alpha + a_1 \quad , \qquad z_1 = \frac{m}{m+n} l_1 \sin\alpha + c_1 \; ,$$

$$-x_2 = \frac{n}{m+n} l_1 \cos\alpha + a_2 \quad , \qquad -z_2 = \frac{n}{m+n} l_1 \sin\alpha - c_2 \; ;$$

die betreffende Gleichgewichtsbedingung ist daher

$$\left.\begin{array}{l} P\left(\frac{m}{m+n} l_1 (\sin\alpha\cos\widehat{Px} - \cos\alpha\sin\widehat{Px}) + c_1\cos\widehat{Px} - a_1\sin\widehat{Px}\right) \\ -Q\left(\frac{n}{m+n} l_1 (\sin\alpha\cos\widehat{Qx} - \cos\alpha\sin\widehat{Qx}) - c_2\cos\widehat{Qx} - a_2\sin\widehat{Qx}\right) \\ \qquad + N_2 l_2 \cos w_2 = 0 \end{array}\right\} . \quad (b.$$

Diese drei Gleichungen (a) und (b) reichen nicht hin, die vier Größen N_1, N_2, ω_1 und ω_2 zu bestimmen; es muß daher für das äußere Gleichgewicht eine dieser Größen überflüssig sein, da die Kräfte N bei dem innern Gleichgewicht nicht betheiligt sind, und in der That wird man einsehen, daß es für unsern Zweck genügt, zu bedingen, daß der Punkt B in der Geraden AB bleibt, daß also diese Gerade einen normalen Widerstand leistet, der im Sinne der positiven oder negativen x gerichtet ist. Dadurch haben wir $\cos\omega_2$ bis auf das Zeichen bestimmt, und können nun $N_2 \cos\omega_2$ einfach durch N_2 ersetzen, da $N_2 \sin\omega_2$ Null wird. Hat man dann diese Größe aus der Gleichung (b) in die erste der Gleichungen (a) eingeführt, so kann man aus diesen die Werthe von $N_1 \sin\omega_1$ und $N_1 \cos\omega_1$ ziehen, wodurch auch N_1 und ω_1 bekannt sind. Eine Beziehung zwischen P und Q kann aber durch jene Gleichungen nicht erhalten werden.

Suchen wir also die Bedingungen für das innere Gleichgewicht der einzelnen Theile. Dazu bezeichnen wir die innern Wirkungen in den Punkten C, D, E, F durch J_1, J_2, J_3, J_4, die Componenten von J nach CA und CE positiv genommen durch J_1' und J_1'', die von J_2 nach DA und DF durch J_2', J_2'', die von J_3 nach EB und EC durch J_3', J_3'', endlich die Componenten von J_4 nach FB und FD durch J_4' und J_4'', und erhalten so für das Gleichgewicht der Geraden CD die drei Gleichungen:

$$\text{c.)} \quad \left\{ \begin{aligned} & N_1 \cos\omega_1 + (J_1' + J_2') \cos\alpha = 0 , \\ & N_1 \sin\omega_1 + (J_1' + J_2') \sin\alpha + J_1'' + J_2'' = 0 , \\ & n J_1'' - m J_2'' = 0 . \end{aligned} \right.$$

Für das Gleichgewicht der Geraden EF ergeben sich ebenso die Bedingungen:

$$\text{d.)} \quad \left\{ \begin{aligned} & N_2 + (J_3' + J_4') \cos\alpha = 0 , \\ & (J_3' + J_4') \sin\alpha + J_3'' + J_4'' = 0 , \\ & m J_3'' - n J_4'' = 0 , \end{aligned} \right.$$

für deren letzte der Punkt B als Drehungspunkt genommen ist. Bezieht man ferner die drehenden Wirkungen der an der Seite CE angreifen-

den Kräfte auf den Punkt C, so werden die Bedingungen für das Gleichgewicht dieser Seite

$$\left.\begin{aligned} P\,cos\,\widehat{Px} - (J_1' + J_3')\,cos\,\alpha &= 0 \\ P\,sin\,\widehat{Px} - (J_1' + J_3')\,sin\,\alpha - J_1'' - J_3'' &= 0 \\ P\,(c_1\,cos\,\widehat{Px} - a_1\,sin\,\widehat{Px}) - J_3'\,l_2\,cos\,\alpha &= 0 \end{aligned}\right\}, \quad (e.$$

und für das Gleichgewicht der Seite DF findet man in gleicher Weise, wenn die drehenden Wirkungen in Bezug auf den Punkt D genommen werden, die Bedingungen:

$$\left.\begin{aligned} Q\,cos\,\widehat{Qx} - (J_2' + J_4')\,cos\,\alpha &= 0 \\ Q\,sin\,\widehat{Qx} - (J_2' + J_4')\,sin\,\alpha - J_2'' - J_4'' &= 0 \\ Q\,(c_2\,cos\,\widehat{Qx} + a_2\,sin\,\widehat{Qx}) - J_4'\,l_2\,cos\,\alpha &= 0 \end{aligned}\right\}. \quad (f.$$

Wir haben demnach im Ganzen 15 Gleichungen, worin 11 Unbekannte enthalten sind, die 8 Kräfte J, die beiden Widerstände N_1 und N_2 und der Richtungswinkel ω_1 des ersten derselben. Es sind demnach drei derselben überflüssig oder lassen sich aus den andern durch analytische Umformung oder Verbindung derselben ableiten. So gibt in der That die Summe von je der ersten der Gleichungen (c), (d), (e) und (f) die erste der Gleichungen (a), wenn darin N_2 für $N_2\,cos\,\omega_2$ gesetzt wird, und die zweite dieser Gleichungen, $N_2\,sin\,\omega_2 = 0$ gesetzt, kommt zum Vorschein, wenn je die zweite der genannten Gleichungen (c) bis (f) addirt werden. Addirt man dagegen die Summe von je der dritten der Gleichungen (e) und (f) und der ersten der Gleichungen (d), nachdem diese mit l_2 multiplizirt worden, zu der Gleichung (b), so ergibt sich die gesuchte Beziehung zwischen P und Q, nämlich

$$m P\,sin\,(\alpha - \widehat{Px}) = n Q\,sin\,(\alpha - \widehat{Qx})\,. \quad (g.$$

Diese Bedingung ist, wie man sieht, gänzlich unabhängig von den Größen a_1, a_2, c_1, c_2; sie ist dieselbe, wie die für das Gleichgewicht der mit P und Q gleichen und parallelen Kräfte P′ und Q′, welche an den Endpunkten C und D des in A befestigten Hebels CD angreifen; denn man wird sich leicht überzeugen, daß

$$\frac{m}{m+n} l_1 \sin(\alpha - \widehat{Px}) = p' \quad , \quad \text{und} \quad \frac{n}{m+n} l_1 \sin(\alpha - \widehat{Qx}) = q'$$

die Hebelarme der drehenden Wirkungen von P′ und Q′ in Bezug auf den Punkt A sind, und die Gleichung (g) demnach auf

$$P'p' = Q'q'$$

zurückkommt. Es ist demnach für das innere Gleichgewicht unsers Systems ganz gleichgültig, wo die Kräfte P und Q angreifen, wenn nur die Angriffspunkte derselben mit den Seiten CE und DF fest verbunden sind; das Gleichgewicht findet immer unter derselben Bedingung statt, unter welcher sich zwei jenen Kräften gleiche und parallele Kräfte in C und D das Gleichgewicht halten.

Wenn daher $m = n$ und $\widehat{Qx} = \widehat{Px}$, d. h. wenn A die Mitte von CD ist und die Kräfte parallel sind, so muß für das Gleichgewicht $Q = P$ sein, und umgekehrt wird dieses immer stattfinden, wenn $Q = P$ ist, ob z. B. die Kraft P in G oder in J, Fig. 16, angreift.

Die nähere Bestimmung der Widerstände N und der innern Kräfte J ist hier für uns von keinem hinreichenden Belang, um weiter darauf einzugehen, und soll dem Leser überlassen bleiben; ich will statt dessen das eben untersuchte System noch unter einer etwas veränderten Gestalt betrachten, nämlich unter der in Figur 18 dargestellten, welche der bei der Decimal-Wage angewendeten Construction mehr als die vorhergehende entspricht; sie geht aus dieser hervor, wenn man die Seite EF bei B begrenzt, CE und EB fortnimmt und die Kraft P unmittelbar an C angreifen läßt, so daß auf der linken Seite von AB noch das Parallelogramm ADFB bleibt, mit dessen mittlerer Seite DF der Angriffspunkt der Kraft Q fest verbunden ist. Für dieses genügt es nun aber nicht mehr, daß der Punkt B auf der Geraden AB bleiben muß; im jetzigen Falle muß auch der Punkt B so befestigt sein, daß sich die Seite DB nur um denselben drehen läßt. Nach dem Vorhergehenden ist für diesen Fall leicht einzusehen, daß es auch hier für das Gleichgewicht gleichgültig ist, wo der Angriffspunkt der Kraft Q liegt, und daß ihre Wirkung in dieser Beziehung immer dieselbe ist, als wenn sie ihren Angriffspunkt in D hätte, daß man also für parallele Kräfte das Verhältniß: $Q = 10P$ erhält, wenn $m = 10n$, $\overline{AC} = 10\overline{AD}$ ist.

Ich habe den gegenwärtigen Fall hauptsächlich deßwegen in nähere Betrachtung gezogen, weil hier der Punkt B befestigt ist, die obige Beschränkung der Richtung der Kraft N_2 also nicht mehr zulässig scheint. Es muß nun allerdings außer der zu AB senkrecht gerichteten N_2 noch eine längs BA wirkende Kraft eingeführt werden, welche sich jeder Aenderung der Seite AB des Parallelogramms ABFD widersetzt; man würde aber sehr irren, wenn man diese Kraft mit der N_2 zu einer vereinigt in die Bedingungen für das äußere Gleichgewicht einführen wollte; denn diese neue Kraft ist eine von den innern Kräften J und greift ebensowohl in A in entgegengesetztem Sinne wirkend an, wie in B, und für das äußere Gleichgewicht unseres Systems, zu welchem AB als Seite des Parallelogramms ABFD gehört, genügt es, wenn der Punkt B in der unverrückbaren Geraden AZ bleiben muß, wenn also in B ein zu AZ normaler äußerer Widerstand N_2 vorhanden ist. Man wird daher den jetzigen Fall auf den vorhergehenden in der Art richtig zurückführen, daß man sich die feste Gerade AB Fig. 17 durch die Seite CE gelegt, und die Seite DC verlängert denkt; man wird daraus ersehen, daß an dem System noch dieselben äußern Widerstände N_1 und N_2 und die 8 innern Kräfte J thätig sind; man wird sich aber auch ohne die Gleichgewichtsbedingungen überzeugen, daß die Kräfte J_1' und J_2' in D und A, J_2'' und J_4'' in A und B, J_4' und J_3' in B und F gleich und entgegengesetzt sein müssen, weil zwischen diesen Punkten keine äußern Kräfte angreifen.

Nach diesen Erörterungen hat man für das äußere Gleichgewicht, und zwar für das der äußern fördernden Wirkungen wie oben die Bedingungen:

$$\left.\begin{array}{l} P \cos \widehat{Px} + Q \cos \widehat{Qx} + N_1 \cos \omega_1 + N_2 = 0 \\ P \sin \widehat{Px} + Q \sin \widehat{Qx} + N_1 \sin \omega_1 = 0 \end{array}\right\},$$

und für das Gleichgewicht der äußern drehenden Wirkungen ergibt sich nun die Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} P l_1 \frac{m}{m+n} \sin(\alpha - \widehat{Px}) + N_2 l_2 \\ - Q \left(\frac{n}{m+n} l_1 \sin(\alpha - \widehat{Qx}) - c \cos \widehat{Qx} - a \sin Qx\right) = 0 \end{array}\right\}, \quad (h.$$

indem man nun die Coordinaten des Angriffspunktes H von Q in Bezug auf den Punkt D und die Gerade DF mit c und a ohne Inder bezeichnet. Das Gleichgewicht der an der Geraden DF wirkenden Momente in Bezug auf D als Drehungspunkt genommen wird durch die Gleichung:

$$Q''(c \cos \widehat{Qx} + a \sin \widehat{Qx}) - J_4' l_2 \cos \alpha = 0$$

bedingt; man hat aber auch für das Gleichgewicht der Geraden BF die Gleichung:

$$N_2 + J_4' \cos \alpha = 0 ,$$

welche zu der vorhergehenden und der Gleichung (h) addirt, wieder die Bedingung (g) zwischen P und Q gibt. Die übrigen Gleichungen, welche sich noch für das Gleichgewicht der einzelnen Seiten ergeben, dienen nur zur Bestimmung der innern Kräfte J und der äußern Widerstände N und können deßhalb für unsern jetzigen Zweck übergangen werden.

§. 53.

Beispiele für die innere Bewegung veränderlicher Systeme, welche aus mehreren unveränderlichen Theilen zusammengesetzt sind, liefern uns alle Maschinen; ich werde jedoch auf diese hier nicht näher eingehen, da diese eine sehr beschränkte Bewegung besitzen und ihnen in der Maschinenlehre eine besondere und ausführliche Untersuchung zu Theil werden soll. Für jetzt verweise ich daher in dieser Beziehung auf die im ersten Abschnitt §§. 23 bis 25 erörterten Bewegungen, welche dort als äußere Zustände behandelt wurden, welche aber auch als innere Bewegungen bei äußerm Gleichgewichtszustande betrachtet werden können, und wende mich zu der Untersuchung eines veränderlichen Systems, welches eine unmittelbare und vollständige Anwendung der für nicht stetige Systeme abgeleiteten Gleichungen gestattet, nämlich zu der Untersuchung der innern Bewegung eines Planetensystems, d. h. eines Systems von festen Körpern, welche ihrer gegenseitigen Massen-Anziehung unterworfen sind, aber durch ihre aus beliebig gerichteten anfänglichen Geschwindigkeiten hervorgegangene Bewegungen verhindert werden, dieser gegenseitigen Anziehung unmittelbar folgend sich zu einer einzigen Masse zu vereinigen *).

---

*) Es kann natürlich hier nicht von einer vollständig durchgeführten Theorie der Bewegungen unseres Planetensystems die Rede sein, da hiezu der Raum viel zu

Ich gehe bei dieser Untersuchung von folgenden Voraussetzungen aus, welche sich aus den bei unserm Planetensystem gemachten Erfahrungen ergeben,

1) daß das Gesetz der gegenseitigen Anziehung irgend zweier materieller Punkte des Systems durch

$$R = Gmm' \frac{1}{w^2}$$

ausgedrückt werde, worin die einzelnen Größen die in §. 94 des zweiten Buches angegebene Bedeutung haben;

2) daß alle Körper des Systems der Form nach unveränderlich und im Verhältniß zu ihrer Größe sehr weit von einander entfernt sind;

3) daß einer dieser Körper eine weit größere Masse besitzt, als alle übrigen, so daß das Verhältniß $\frac{M_i}{M}$, worin M die Masse des genannten, M_i die Masse eines der übrigen Körper des Systems vorstellt, für alle diese Körper ein sehr kleines ist; endlich

4) daß die auf das System wirkenden äußern Kräfte von hinreichend weit entfernten Punkten ausgehen, um die auf die einzelnen Massen des Systems ausgeübten Wirkungen diesen Massen proportional und als Functionen des Mittelpunktes der Masse des ganzen Systems annehmen zu dürfen, was wieder auf die Annahme hinaus kommt, daß die größte Ausdehnung des Systems eine sehr kleine Größe ist gegen die Entfernung des Mittelpunktes seiner Masse von allen jenen Ausgangspunkten der äußern Kräfte, daß also dieser Mittelpunkt als Angriffspunkt jeder äußern Kraft genommen werden darf, und sich demnach alle äußern Kräfte in diesem Punkte zu einer einzigen Resultirenden vereinigen lassen.

Betrachten wir nach diesen Voraussetzungen zuerst die äußere Bewegung des Systems, so leuchtet sogleich ein, daß sich gemäß der letztern zufolge der Erörterungen des §. 18 der Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems genau so bewegt, als wenn die ganze Masse desselben in ihm vereinigt, das ganze System also nur ein einfacher materieller

---

beschränkt wäre und über diesen Gegenstand in der Mécanique céleste von Laplace, in der Theoria motus corporum coelestium von Gauß und in der Théorie analytique du système du monde von Pontécoulant vorzügliche Werke vorhanden sind.

Punkt wäre *). Die Gesetze der drehenden Bewegung unsers Systems um seinen Mittelpunkt werden durch jene Voraussetzung indessen nicht wesentlich vereinfacht; denn wenn nun auch die Componenten $\Sigma . M_{\Xi}$, $\Sigma . M_{H}$, $\Sigma . M_{Z}$ des resultirenden Momentes in den Gleichungen (15) und (18) in §. 14 Null werden, so bleibt immer noch die Veränderlichkeit der Massemomente und der Einfluß der innern Bewegungen zu berücksichtigen. Man wird aber aus diesen Voraussetzungen zufolge der Erörterungen in §§. 15, 16 und 17 den Schluß ziehen, daß für unser System das Princip der Einhaltung der Sectorflächen in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse stattfindet, und es daher in demselben eine unveränderliche oder parallel bleibende Ebene der größten Flächensumme gibt, oder daß das resultirende Moment aller Bewegungsgrößen in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der Mittelpunkt der Masse ist, einen constanten Werth und seine Achse eine constante Richtung behält.

Nehmen wir also an, die Lage dieser Achse sei aus den dem Anfang der Zeit entsprechenden und für jeden einzelnen Körper des Systems gegebenen Größen berechnet, nämlich aus den anfänglichen Coordinaten $x_i^{(0)}$, $y_i^{(0)}$, $z_i^{(0)}$ des Mittelpunktes seiner Masse in Bezug auf ein beliebiges rechtwinkliches Coordinatensystem, dessen Anfangspunkt der

*) Auf den ersten Anblick könnte es scheinen, als ob dieses auch ohne die genannte Voraussetzung stattfände und als ob die Erörterungen des §. 18 im Widerspruch ständen mit dem in §. 12 ausgesprochenen und durch die Gleichungen (12^a) daselbst dargestellten allgemeinen Gesetze der fortschreitenden Bewegung eines veränderlichen Systems. Beachtet man aber, daß um dieses letztere Gesetz, welches unter allen Voraussetzungen gültig bleibt, in Anwendung zu bringen, alle an dem System thätigen Kräfte in den Mittelpunkt der Masse versetzt und dort zu einer fördernden Resultirenden vereinigt werden müssen, so wird man einsehen, daß die Verhältnisse im Allgemeinen doch andere sind, als in dem Falle, wo dieser Mittelpunkt selbst der Angriffspunkt der allgemeinen Resultirenden des Systems ist. Wenn z. B. alle auf das System ausgeübten äußern Wirkungen von einem festen Punkte ausgehen, welchen man als Anfangspunkt fester Coordinaten nimmt, und die Richtung der resultirenden Wirkung durch den Mittelpunkt der Masse des bewegten Systems selbst geht, so wird dieser eine rein elliptische Bewegung annehmen; wenn aber jene Richtung durch einen andern Punkt geht, und man die Resultirende erst parallel mit sich in den Masse-Mittelpunkt versetzen muß, so geht die Richtung dieser fördernden Resultirenden nicht in allen Lagen durch den Anfangspunkt, die Bewegung kann also nicht mehr in einer Ebene stattfinden und keine rein elliptische mehr sein.

Mittelpunkt der Masse des ganzen Systems sei, aus den Componenten $v_i^{(0)} \cos \alpha_i^{(0)}$, $v_i^{(0)} \cos \beta_i^{(0)}$, $v_i^{(0)} \cos \gamma_i^{(0)}$ seiner anfänglichen Geschwindigkeit $v_i^{(0)}$, aus den Winkeln $\vartheta_i^{(0)}$, $\omega_i^{(0)}$, $\psi_i^{(0)}$ seiner Hauptachsen mit jenen Coordinatenachsen und aus seinen Winkelgeschwindigkeiten $p_i^{(0)}$, $q_i^{(0)}$, $r_i^{(0)}$ um diese Hauptachsen, denken wir uns dann jenes Coordinatensystem so gedreht, daß seine z-Achse mit der so berechneten Achse des resultirenden Momentes der Bewegungsgrößen zusammenfällt, die Ebene der xy also mit der Ebene der größten Flächensumme, wobei die Achse der x noch eine beliebige Lage behalten kann, und beziehen wir nun die innere Bewegung des Systems auf dieses neue Coordinatensystem, indem wir für dieses die anfänglichen Gegebenen auf dieselbe Weise wie vorher bezeichnet sein lassen.

In Bezug auf dieses Coordinatensystem wird die Bewegung des Mittelpunktes der Masse M_i durch die Gleichungen (57) ausgedrückt; diese werden aber unserer vierten Voraussetzung gemäß auf die Form der Gleichungen (49) zurückkommen, weil nach dieser die diesen Gleichungen zu Grunde liegenden Bedingungen:

$$X_i = M_i f_x(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \;,\quad Y_i = M_i f_y(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}) \;,\quad Z_i = M_i f_z(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})$$

und

$$\Sigma . X = f_x(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\,\Sigma . M \;,\quad \Sigma . Y = f_y(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\,\Sigma . M \;,$$
$$\Sigma . Z = f_z(\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z})\,\Sigma . M$$

erfüllt sind. Wir haben also für die fortschreitende Bewegung des Mittelpunktes der Masse M_i die Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \, J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \, J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \, J_{i,k} \cos \beta_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \, J_{h,i} \cos \beta_{h,i} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n} . \, J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1} . \, J_{h,i} \cos \gamma_{h,i}
\end{aligned}\right\} , \qquad (a.$$

worin nun die Componenten der innern Kräfte J der ersten und zweiten unserer Voraussetzungen gemäß näher zu bestimmen sind.

Allgemein und streng betrachtet werden die fördernden Componenten der gegenseitigen Anziehung zwischen den Massen M_i und M_k durch

die in §. 121 des zweiten Buches abgeleiteten Werthe (88) oder (89) dargestellt; mit Rücksicht auf unsere zweite Voraussetzung aber und der darauf sich stützenden Erörterung in §. 108 desselben Buches, wonach die zwischen einem Punkte und einem stetigen System von sehr kleiner Ausdehnung im Vergleich zu seiner Entfernung von jenem Punkte statthabende gegenseitige Anziehung als eine Kraft betrachtet werden kann, deren Richtung durch den Mittelpunkt der Masse des stetigen Systems geht, kann man der Kraft $J_{i,k}$ unserer ersten Voraussetzung gemäß mit hinreichender Annäherung die einfache Form geben:

$$J_{i,k} = G M_i M_k \frac{1}{w_{i,k}^2}$$

$$= G M_i M_k \frac{1}{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2},$$

und ihre Componenten werden dann gemäß der Werthe (62) in §. 96 des II. Buches folgende:

$$\text{b.)} \left\{ \begin{aligned} J_{i,k} \cos \alpha_{i,k} &= G M_i \frac{M_k (x_k - x_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}, \\ J_{i,k} \cos \beta_{i,k} &= G M_i \frac{M_k (y_k - y_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}, \\ J_{i,k} \cos \gamma_{i,k} &= G M_i \frac{M_k (z_k - z_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}. \end{aligned} \right.$$

Ebenso hat man für die zwischen den Massen M_h und M_i thätige anziehende Wirkung die Componenten:

$$\text{b}') \left\{ \begin{aligned} J_{h,i} \cos \alpha_{h,i} &= G M_i \frac{M_h (x_i - x_h)}{\sqrt{[(x_i - x_h)^2 + (y_i - y_h)^2 + (z_i - z_h)^2]^3}} \\ &= - G M_i \frac{M_h (x_h - x_i)}{\sqrt{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z_i)^2]^3}} \\ J_{h,i} \cos \beta_{h,i} &= - G M_i \frac{M_h (y_h - y_i)}{\sqrt{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z_i)^2]^3}} \\ J_{h,i} \cos \gamma_{h,i} &= - G M_i \frac{M_h (z_h - z_i)}{\sqrt{[(x_h - x_i)^2 + (y_h - y_i)^2 + (z_h - z_i)^2]^3}} \end{aligned} \right.$$

man kann daher nun die beiden Summenglieder auf der rechten Seite unserer Gleichungen (a) zu einem einzigen vereinigen, wodurch diese Gleichungen folgende Form annehmen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_k (x_k - x_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_k (y_k - y_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} &= G M_i \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_k (z_k - z_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}}
\end{aligned}\right\} , \quad (c.$$

bei welchen jedoch zu beachten ist, daß darin für k nicht auch i selbst gesetzt werden kann, sondern nur die Werthe von 1 bis $i - 1$ und von $i + 1$ bis n.

Macht man dann

$$V_i = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} ,$$

so hat man auch

$$\frac{dV_i}{dx_i} = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k (x_k - x_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} ,$$

$$\frac{dV_i}{dy_i} = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k (y_k - y_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^3}} ,$$

$$\frac{dV_i}{dz_i} = G \sum_{k=1}^{k=n} . \frac{M_i M_k (z_k - z_i)}{\sqrt{[(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2]^2}} ,$$

und die vorhergehenden Gleichungen kommen nun auf die der Form nach sehr einfachen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{dV_i}{dx_i} , \quad M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} = \frac{dV_i}{dy_i} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} = \frac{dV_i}{dz_i}
\end{aligned}\right\} , \quad (d.$$

zurück, in welchen aber nicht zu übersehen ist, daß die rechten Seiten nur theilweise Aenderungsgesetze der Function V sind, und daß sie deßhalb weder einzeln noch auch alle drei für sich allein integrirt werden können.

Beachtet man aber, daß für jeden Körper des Systems drei ähnliche Gleichungen bestehen, so kann man durch die Verbindung dieser 3 Gleichungen eine neue darstellen, welche sich in Bezug auf t einmal integriren läßt, wie wir sogleich sehen werden.

§. 54.

Da der Mittelpunkt der Masse eines veränderlichen Systems von der Natur des in Betrachtung gezogenen seine Lage gegen alle Körper des Systems fortwährend ändert, derselbe auch durch die Beobachtung nicht unmittelbar wahrgenommen werden kann, sondern jedesmal erst berechnet werden muß, so ist es für die Vergleichung der Rechnung mit der Beobachtung, also insbesondere für die Zwecke der Astronomie, viel zweckmäßiger, den Anfang der Coordinaten in den Mittelpunkt einer der Massen des Systems — wozu man natürlich die nach unserer dritten Voraussetzung im System vorhandene größte Masse $\mathfrak{M}$ wählen wird — zu verlegen und die Gleichungen der Bewegung einer jeden der übrigen Massen in Bezug auf diese neuen Achsen, welche übrigens vorerst den frühern parallel bleiben sollen, auszudrücken. Diese neuen Gleichungen werden die Form der Gleichungen (50) in §. 30 annehmen; wenn wir daher die Masse $\mathfrak{M}$ von den übrigen absondern, und diese letztern wie bisher mit M_1, M_2, u. s. f. bis M_n bezeichnen, so daß das jetzige n dem frühern n — 1 gleichkommt, ferner die Componenten der zwischen der Masse $\mathfrak{M}$ und der Masse M_i thätigen anziehenden Wirkung mit

$$J_i \cos \alpha_i \quad , \quad J_i \cos \beta_i \quad , \quad J_i \cos \gamma_i \quad ,$$

also auch die Componenten der gegenseitigen Anziehung der Massen M und M_k mit

$$J_k \cos \alpha_k \quad , \quad J_k \cos \beta_k \quad , \quad J_k \cos \gamma_k \quad ,$$

so haben wir zuerst die Beziehungen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i\frac{d^2x_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n}.J_{i,k}\cos\alpha_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1}J_{h,i}\cos\alpha_{h,i} - J_i\cos\alpha_i - \frac{M_i}{\mathfrak{M}}\sum_{k=1}^{k=n}.J_k\cos\alpha_k,\\
M_i\frac{d^2y_i'}{dt^2} &= \sum^{k=n}.J_{i,k}\cos\beta_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1}.J_{h,i}\cos\beta_{h,i} - J_i\cos\beta_i - \frac{M_i}{\mathfrak{M}}\sum_{k=1}^{k=n}.J_k\cos\beta_k,\\
M_i\frac{d^2z_i'}{dt^2} &= \sum_{k=i+1}^{k=n}.J_{i,k}\cos\gamma_{i,k} - \sum_{h=1}^{h=i-1}.J_{h,i}\cos\gamma_{h,i} - J_i\cos\gamma_i - \frac{M_i}{\mathfrak{M}}\sum_{k=1}^{k=n}.J_k\cos\gamma_k.
\end{aligned}\right\}$$

Die hier für die innern Componenten $J_{i,k}\cos\alpha_{i,k}$, u. s. f. einzuführenden Werthe unterscheiden sich von den Werthen (b) nur durch die Accente an den Coordinaten x, y und z, und für die Componenten $J_i\cos\alpha_i$, $J_i\cos\beta_i$, $J_i\cos\gamma_i$ findet man mit Weglassung dieser Accente nach dem Vorhergehenden leicht die Werthe:

$$\left.\begin{aligned}
J_i\cos\alpha_i &= G\mathfrak{M}M_i\frac{x_i}{\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^3}} = G\mathfrak{M}M_i\frac{x_i}{r_i^3}\\
J_i\cos\beta_i &= G\mathfrak{M}M_i\frac{y_i}{\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^3}} = G\mathfrak{M}M_i\frac{y_i}{r_i^3}\\
J_i\cos\gamma_i &= G\mathfrak{M}M_i\frac{z_i}{\sqrt{(x_i^2+y_i^2+z_i^2)^3}} = G\mathfrak{M}M_i\frac{z_i}{r_i^3}
\end{aligned}\right\};$$

ebenso für die Componenten $J_k\cos\alpha_k$, $J_k\cos\beta_k$, $J_k\cos\gamma_k$ die Ausdrücke:

$$J_k\cos\alpha_k = G\mathfrak{M}M_k\frac{x_k}{\sqrt{x_k^2+y_k^2+z_k^2)^3}} = G\mathfrak{M}M_i\frac{x_k}{r_k^3},$$

$$J^k\cos\beta_k = G\mathfrak{M}M_k\frac{y_k}{r_k^3}, \qquad J_k\cos\gamma_k = G\mathfrak{M}M_k\frac{z_k}{r_k^3},$$

worin die r_i und r_k offenbar die Länge der zu den Mittelpunkten der Massen M_i und M_k gezogenen Fahrstrahlen vorstellen.

Mit diesen und den frühern Werthen und mit Weglassung der Accente auf der linken Seite der obigen Gleichungen für die innere Bewegung der Masse M_i in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse $\mathfrak{M}$ und wenn noch zur Abkürzung die Größe $\sqrt{(x_k-x_i)^2+(y_k-y_i)^2+(z_k-z_i)^2}$

durch $w_{i,k}$ ersetzt wird, so nehmen die genannten Gleichungen die unsern besondern Voraussetzungen entsprechende Form an, und werden

$$\text{e.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 x_i}{dt^2} &= G\left[\sum_{k=1}^{k=n}.\frac{M_k\,(x_k - x_i)}{w_{i,k}^3} - \sum_{k=1}^{k=n}.\frac{M_k\,x_k}{r_k^3} - \frac{\mathfrak{M}\,x_i}{r_i^3}\right],\\
\frac{d^2 y_i}{dt^2} &= G\left[\sum_{k=1}^{k=n}.\frac{M_k\,(y_k - y_i)}{w_{i,k}^3} - \sum_{k=1}^{k=n}.\frac{M_k\,y_k}{r_k^3} - \frac{\mathfrak{M}\,y_i}{r_i^3}\right],\\
\frac{d^2 z_i}{dt^2} &= G\left[\sum_{k=n}^{k=n}.\frac{M_k\,(z_k - z_i)}{w_{i,k}^3} - \sum_{k=1}^{k=n}.\frac{M_k\,z_k}{r_k^3} - \frac{\mathfrak{M}\,z_i}{r_i^3}\right].
\end{aligned}\right.$$

In der zweiten Summe auf der rechten Seite dieser Gleichungen erhält k alle Werthe von 1 bis n, während in der ersten, wie schon bemerkt, der Werth $k = i$ nicht vorkommt; wir wollen daher, um die beiden Summen in eine einzige zusammenfassen zu können, und die ebengenannte Beschränkung augenfällig zu machen, in der letztern Summe das Glied, für welches $k = i$ sein soll, ausscheiden und die übrigen Glieder dieser Summe mit denen der ersten Summe unter dem Zeichen $\sum\limits_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n}.$ zusammenfassen, jenen Gleichungen also die neue Form geben:

$$\text{f.)}\quad\left\{\begin{aligned}
\frac{d^2 x_i}{dt^2} &= G\sum_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n}.\,M_k\left(\frac{x_k - x_i}{w_{i,k}^3} - \frac{x_k}{r_k^3}\right) - G(\mathfrak{M} + M_i)\frac{x_i}{r_i^3},\\
\frac{d^2 y_i}{dt^2} &= G\sum_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n}.\,M_k\left(\frac{y_k - y_i}{w_{i,k}^3} - \frac{y_k}{r_k^3}\right) - G(\mathfrak{M} + M_i)\frac{y_i}{r_i^3},\\
\frac{d^2 z_i}{dt^2} &= G\sum_{k=1,=i+1}^{k=i-1,=n}.\,M_k\left(\frac{z_k - z_i}{w_{i,k}^3} - \frac{z_k}{r_k^3}\right) - G(\mathfrak{M} + M_i)\frac{z_i}{r_i^3}.
\end{aligned}\right.$$

Beachtet man endlich, daß die Summen dieser Gleichungen sich als theilweise Aenderungsgesetze der Function:

$$V_i = G M_i \sum_{k=1=i+1}^{k=i-1,=n}.\,M_k\left(\frac{1}{\sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2 + (z_k - z_i)^2}} - \frac{x_i x_k + y_i y_k + z_i z_k}{\sqrt{(x_k^2 + y_k^2 + z_k^2)^3}}\right)$$

in Bezug auf sie eine der Veränderlichen x_i, y_i und z_i ergeben, so kann man die Gesetze der innern fortschreitenden Bewegung der Masse M_i

in Bezug auf den Mittelpunkt der Masse $\mathfrak{M}$ durch folgende einfache Gleichungen darstellen:

$$\left.\begin{aligned}
M_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} + G M_i \frac{\widehat{\mathfrak{M}}_i x_i}{r_i^3} &= \frac{d V_i}{d x_i} \\
M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + G M_i \frac{\widehat{\mathfrak{M}}_i y_i}{r_i^3} &= \frac{d V_i}{d y_i} \\
M_i \frac{d^2 z_i}{dt^2} + G M_i \frac{\widehat{\mathfrak{M}}_i z_i}{r_i^3} &= \frac{d V_i}{d z_i}
\end{aligned}\right\}, \qquad (g.$$

in welchen noch zur Abkürzung die Summe der Massen $\mathfrak{M}$ und M_i durch $\widehat{\mathfrak{M}}_i$ ersetzt ist, und von denen dasselbe gilt, was am Ende des vorigen Paragraphen über die Gleichungen (d) bemerkt wurde.

Aus diesen Gleichungen (d), auf das ganze System ausgedehnt, läßt sich nun eine einzige integrirbare Gleichung herstellen, wenn man sie zuerst je drei der Reihe nach mit $2\frac{dx_i}{dt}$, $2\frac{dy_i}{dt}$, $2\frac{dz_i}{dt}$ multiplizirt, diese drei Producte summirt und die in dieser Weise für das ganze System sich ergebenden n Summen zu einer Summe vereinigt. Denn beachtet man, daß, wenn v_i die innere Geschwindigkeit des Mittelpunktes der Masse M_i ist, man hat

$$2\frac{dx_i}{dt}\frac{d.\frac{dx_i}{dt}}{dt} + 2\frac{dy_i}{dt}\frac{d.\frac{dy_i}{dt}}{dt} + 2\frac{dz_i}{dt}\frac{d.\frac{dz_i}{dt}}{dt} = \frac{d.v_i^2}{dt},$$

ferner, daß man nach der Bedeutung der Function V_i für $i = 1$ den Ausdruck erhält:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV_1}{dx_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{dV_1}{dy_1}\frac{dy_1}{dt} + \frac{dV_1}{dz_1}\frac{dz_1}{dt} = \\
&\quad = G M_1 M_2 \frac{(x_2 - x_1)\frac{dx_1}{dt} + (y_2 - y_1)\frac{dy_1}{dt} + (z_2 - z_1)\frac{dz_1}{dt}}{\sqrt{[(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2]^3}} \\
&\quad + G M_1 M_3 \frac{(x_3 - x_1)\frac{dx_1}{dt} + (y_3 - y_1)\frac{dy_1}{dt} + (z_3 - z_1)\frac{dz_1}{dt}}{\sqrt{[(x_3-x_1)^2 + (y_3-y_1)^2 + (z_3-z_1)^2]^3}} \\
&\quad + \text{etc.}
\end{aligned}\right\};$$